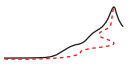
Christoph Schiller

MOTION MOUNTAIN

THE ADVENTURE OF PHYSICS – VOL. II

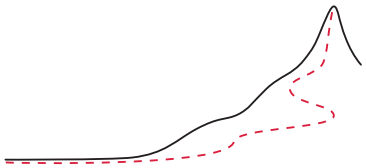
RELATIVITY

www.motionmountain.net



Christoph Schiller
Translated by Megumi Hirooka

Motion Mountain



The Adventure of Physics

Volume II

Relativity

Edition 27.06, available as free pdf
with films at www.motionmountain.net

Editio vicesima septima.

Proprietas scriptoris © Chrestophori Schiller
tertio anno Olympiadis trigesimae.

Omnia proprietatis iura reservantur et vindicantur.
Imitatio prohibita sine auctoris permissione.
Non licet pecuniam expetere pro aliqua, quae
partem horum verborum continet; liber
pro omnibus semper gratuitus erat et manet.

Twenty-seventh edition.

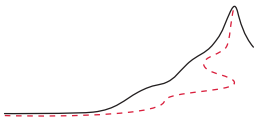
Copyright © 1990–2014 by Christoph Schiller,
the third year of the 30th Olympiad.

This pdf file is licensed under the Creative Commons
Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0 Germany
Licence, whose full text can be found on the website
creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de,
with the additional restriction that reproduction, distribution and use,
in whole or in part, in *any* product or service, be it
commercial or not, is not allowed without the written consent of
the copyright owner. The pdf file was and remains free for everybody
to read, store and print for personal use, and to distribute
electronically, but only in unmodified form and at no charge.

To Britta, Esther and Justus Aaron

τῷ ἐμοὶ δαὶμονι

Die Menschen stärken, die Sachen klären.



はじめに

“Primum movere, deinde docere.*”

古言

この本は, 自然と運動に興味がある人のためのものです. 人, 動物, もの, イメージ, 真空空間はどのようにして動いているか知りたいと興味を持っていると, 知的冒険の世界へと導かれてゆきます. この巻は, 極めて高速, 強力, 遠方の運動を扱う分野である相対性理論と宇宙論から最高の冒険をお届けします. 運動についての研究を行う物理学の分野では, Figure 1に示すように, 特殊相対論と一般相対論が2つの重要な基本要素になります.

特殊相対論はエネルギー速度の限界 c の探求です. 一般相対論は力の限界 $c^4/4G$ の探求です. このテキストでは, この2つの分野のすべての方程式がこの2つの限界値から何が導かれるかを示し, 最後の宇宙論では最大距離スケール $1/\sqrt{\Lambda}$ 近くの運動についての探検を行います. この単純で, 直観的な相対論学習法は, 学生, 専門家にかかわらず, どんな読者の好奇心にも応えることでしょう.

本巻は, 1990年以来, 運動を, 簡単に, 最新の情報で, 魅力的に著すという取り組みから生まれた全6巻の物理概論の第2巻にあたります.

簡単にするために, 本書では, 考え方に焦点をしぼり, 数学は必要最小限にしています. 公式を用いて計算するより, 物理学の考え方を理解することに重点をおいています. 本書全体は大学生が理解できる内容です.

最新であるために, 本書は科学文献にちりばめられている多くの - 実験や理論上の - 至宝をふんだんに盛り込みました.

魅力的であるために, 本書は読者ができるだけ驚きを持って読めるようにしています. 一般物理の本を読むことは, マジックショーに出かけるようなものです. じっと見て, 驚き, 目を疑い, 考え, 最後にトリックがわかってきます. 自然を見ていると, これと同じような体験をすることがよくあります. ページをめくるたびに, 少なくとも一度は驚き, 読者を触発します.

本書のモットーは*die Menschen stärken, die Sachen klären*です. これは, Hartmut von Hentigの教育学についての有名な言葉で, 「人々を鍛え, 物事をはっきりさせる」と言う意味です. 物事をはっきりさせ真実にのみ立脚するのはなかなか勇気がいることです. 考え方の習慣の変えると不安になり, 時には, 怒りでごまかしてしまいがちです. しかし, この不安を克服することで強さが育ってゆくのです. そして, 力強くて美しい感情を経験できます. 人生において優れた冒険をすることでこれが可能になります. 運動について調べることもその一つです. さあ, 楽しみましょう.

* ‘First move, then teach.’ 現代語において, (気持ちを) *moving*させることを*motivating*と言う. この2つの言葉は同じラテン語の起源を持つ.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

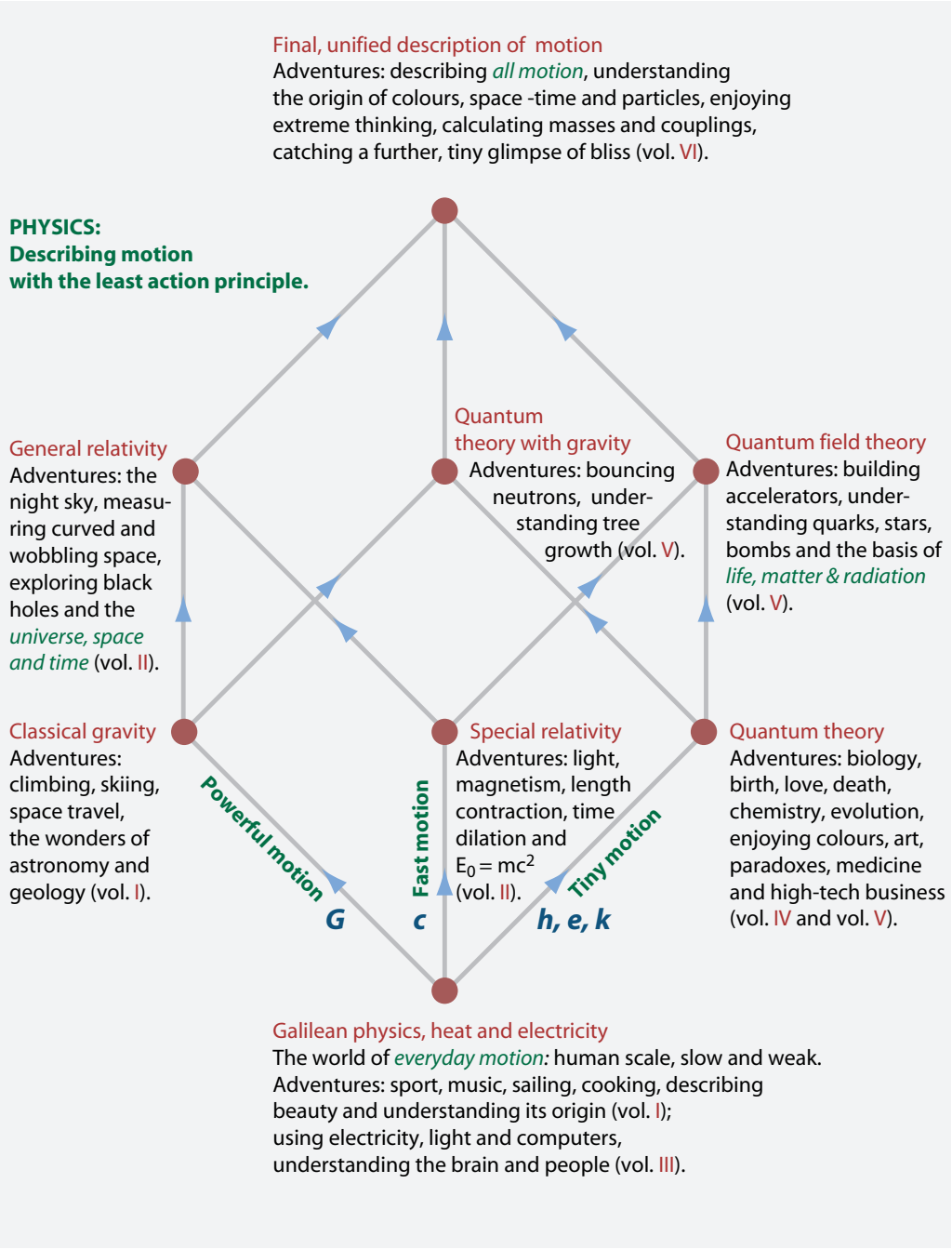


FIGURE 1 物理マップ：関係線は光の速度 c,重力定数 G, プランク定数 h, ボルツマン定数 kおよび 素電荷 e.

Munich, 19 May 2016.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

学習者のアドバイス

学ぶことは知識を拡げ, 知性を向上させ, 人としての可能性に気づかせてくれます. 本による学習, とりわけ, 自然についての学習は効果的で楽しいものです. しかし, マーカーを使って文章にアンダーラインを引くやり方は, 効率の悪いもっとも退屈な勉強法です. 時間の浪費, 気休めというだけではなく, 教科書を読みにくくしてしまいます. 書物にマークをしないことが, 学習効果を高め, 学習をもっと楽しいものにする方法です.

学生と教師としての経験からわかったのは, ダメな生徒を成功させる確実な学習法があるということです. 学習のために本を読む時は, 自分の言葉とイメージで, 大声で, 節ごとに内容をまとめてみてください. まとめられないようなら, もう一度読みましょう. 読んだことを, 自分の言葉とイメージではっきりと声に出してまとめられるまで, これを繰り返します. これなら, 一人でも, 友達と一緒でも, 部屋の中でも, 歩きながらでもできるでしょう. これを読んだものすべてについて行いましょう. 良質な教科書なら, 学習時間と読書時間を大幅に削減でき, 楽しみながら多くを吸収できるでしょう. 悪い教科書からはほとんど何も得られずがっかりするでしょう. 慣れてくると, 授業でも, 小声でつぶやきながらこの方法が使えます. そして, えんえんとノートをとる必要も無くなるでしょう.

教師へのアドバイス

教師は, 生徒が好きで, 生徒を導いて自分の専門分野を学んでほしい思っているでしょう. 仕事に対する情熱こそ, 教師という職業で成功するための重要なポイントです. もしあなたが教師なら, 授業の前に, どうしたら授業の話題が楽しいものになるかということを想像し, 感じ, 話してみてください. これを意識的に続けることで, 授業でのトラブルを最小にし, 教育効果を最大限まで高められるでしょう.

この本は試験でよい成績をあげることを念頭において書いたものではありません. 教師や学生が, 運動の科学である物理学を 理解 し, 楽しむために書いたものです.

この本の利用について

欄外のノートは, 文献参照, 他のページやチャレンジの解への参照をあらわしています. カラー版ではこのようなノートと脚注や他のウェブサイトへのポインターは緑に印字されています. 無料のpdf版では, 緑色の文字はすべてクリックすることができます. また, pdf版には動画も含まれていますが, これらは, Adobe Readerで見ることができます.

チャレンジの解とヒントは付録にあります. チャレンジは研究者レベル (r), 難 (d), 標準学生レベル (s) , 易 (e) に分類されています. チャレンジ　でこの本に解を記載してないものは, (ny) とマークしています.

インターネットへのリンクは, 時間が経つと切れるかもしれません. 大部分のリンクはwww.archive.orgより復帰することができます. ここには古いインターネットページのコピーが保存されています.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

フィードバックとサポート

このテキストは, インターネットからダウンロードできます. 下記の項目やその他何かございましたら, 遠慮なく fb@motionmountain.netまでe-mailください.

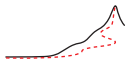
Challenge 1 s
— 何がはっきりしてなかったのか, 何を改良しないといけないのか?
— 追加すべき話, トピック, 問題, 図や動画

注釈を簡単にするために, pdfファイルでは, Adobe Readerの黄色のラベルを追加できます.

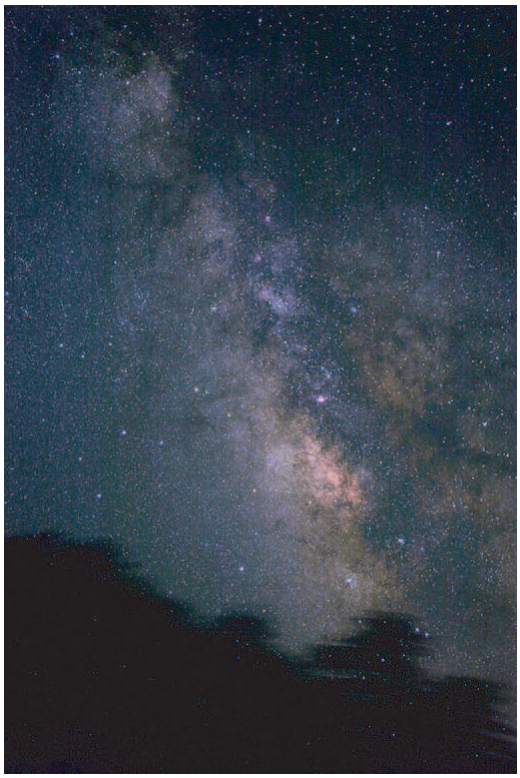
特に, www.motionmountain.net/help.htmlウェブページに記載されているリストの援助はありがたいです. すべてのフィードバックは次版の改良に利用させていただきます. すべての読者を代表してあなたの入力をよろしくお願いします. 特に重要な貢献をしていただいた方には, よろしければ, 感謝をこめてお礼をさせていただきます.

この本の作成, 翻訳し, 出版を行う慈善非課税非営利団体への 寄付は大歓迎です. 詳細はwww.motionmountain.net/donation.html を参照ください. 寄付されたものの使用方法はドイツの税務署がチェックをします. よろしければ, スポンサーリストにあなたの名前を含めることもできます. 世界中の読者になりかわりよろしくお願いします.

動画が埋め込まれたこの本のpdf 版も無償でwww.motionmountain.net から入手できます. 紙版の本も提供できます. お好みの住所に郵送されます. 注文はwww.amazon.com, www.createspace.com または www.lulu.com までお願いします. それでは, お楽しみください.

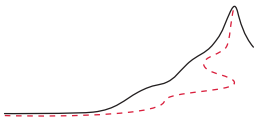


Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net



相対性理論

どうやって事物が動くのかを知りたいと思い,
旅をし, 観察すると発見がある.
自然には, 最大のエネルギー速度があり,
ある人にとっては同時に起きる事象が
別の人には同時ではない.
加速度が地平線のかなたの観測を制限する.
空っぽの空間が曲がり, 揺れ, 動くことを知り,
ブラックホールに魅せられ,
自然には最大の力が存在することに気付く.
なぜ, 星が見え,
なぜ, 夜空が暗いかを理解する.



Chapter 1

最大速度, 静止観測者そして光の運動

“Fama nihil est celerius.*”

古言

運動を精密に記述するには光が不可欠である. 運動が描く線, つまり, 運動径路がまっすぐかどうかを調べるには, それを見通す必要がある. 言い換えると,「まっすぐ」を定義するのに光を用いているのだ. 面が平らであるかどうかを見極めるにはどうすればいいのか. やはり, 光を用いて面を見渡す. **

光が重要な理由は

▷ 光は 外乱を受けていない理想的な運動の基準になる.

からである. もっと古くから, 光が理想的な運動の例とわかっていたら, 物理はもっと速く進歩していただろう.

しかし, 光は本当に運動現象なのだろうか. 答えはイエス. 古代ギリシャ時代に, このことはある日常現象からわかっていた. 影である. 影は, 光が光源から発せられ真直ぐに進む運動体であることを示している. *** ギリシアの哲学者 エンペドクロス (Empedocles) (*c.* 490 to *c.* 430 BCE) は, 光が光源を出て影を落とす面まで移動するのにある程度の時間が必要であるという論理的結論を引き出した. つまり, エンペドクロスは

Ref. 1

▷ 光の速度は有限である.

と言っている. この結論は, 別の単純だが微妙な方法で確認できる. 速度を測定すればいいのだ. 測定とはある基準との比較である. 測定の基準として利用でき

* 「噂より速いものはない」 この文はバージル (Virgil) の言葉”*fama, malum qua non aliud velocius ullum*”を短くしたもので,「噂, あらゆるものより速い邪悪」の意味. アエネイド„ Book, 173節より

** これを検証するには, すべての方向から平面を見るだけでは不十分である. すなわち, あらゆる方向の光が一瞬だけ触れる面は平らでなくてもかまわないからだ. 例を挙げられますか. そうなると, 光を用いて平坦さを検証するには別の方法が必要になる. どうすればいいか説明できますか? 運動を観測するにはどうするか. 使用するのは光. 高精度で長さを測定するにはどうするか. 使用するのは光. 高精度に時間を測定するにはどうするか. 使用するのは光. 昔, 使用したのは太陽からの光で, 今は, セシウムからの光だ.

Challenge 2 s

Page 282

*** 源が影を作るとき, 放出されるものを 射線 とか 輻射と呼ぶ. 影から発見された光以外の輻射の例としては, 可視光と一緒に光源から放出される 赤外線や紫外線, カソード線がある. カソード線は新粒子電子の運動とわかった. また, 影は*X*線の発見につながるのだが, これも高周波数の光であることが判明した. チャンネル線 も影を通して見つかった. これは イオン化された原子が移動しているものである. 3種類の放射線, つまり, α-線 (ヘリウム原子核), β-線 (これも電子), そして γ-線 (高エネルギーX-線) も影を作る. これらはすべて1890年と1910年の間に発見された. この時期は物理学の「レイデイ (ray days)」 だった.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

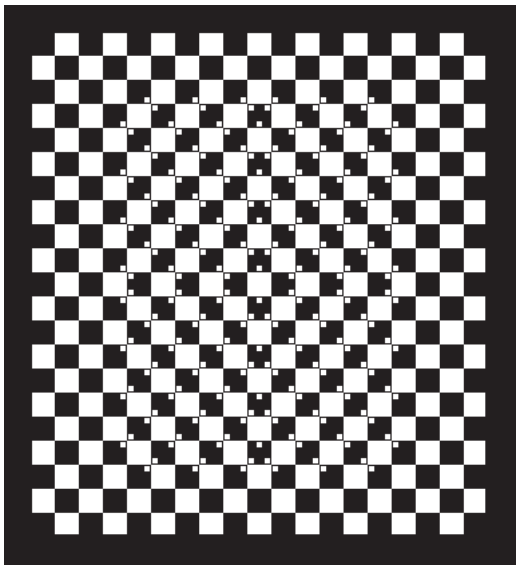


FIGURE 2 線が曲がっているか, 真直ぐかをどうやって調べるか.

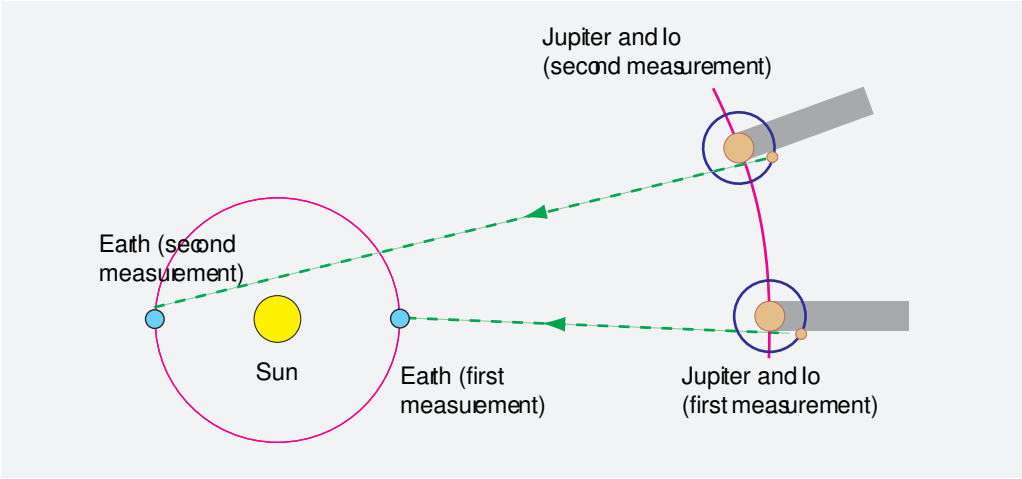


FIGURE 3 Römerの方法 による光速測定

Challenge 3 s

る完全な速度, すなわち　理想的な速度は有限の値でないといけない. 無限の値を持つ速度基準では, まったく, 測定することができないからだ. (なぜか) 自然界では, 軽いものほど速く動く傾向がある. 実際, 極めて軽い (lightな) 光は, 完全で有限な速度で運動をする候補である. このことを, 今から, 確認してみよう.

光の速度が有限であるということは, 私たちが見ているものはすべて過去からのメッセージということだ. 星* や太陽, 愛する人, 私たちが見ているのはすべて過去の像だ. ある意味, 自然は私たちが今という時を楽しむことを拒んでいる. 従って, 私たちは過去を楽しまなければならない.

光の速度は非常に大きい. そのため, それが測定されたのは1668年から1676年になってからで, それ以前に, イサク・ベークマン (Isaac Beeckman)やガリレオ

* 夜空と天の川の写真 (page 12 , copyright Anthony Ayiomamitis) は彼のすばらしいウェブサイト www.perseus.grに掲載されている

(Galileo) をはじめとした多くの学者が試みたが成功しなかった. * その測定方法を初めて実現し, 発表したのは オランダ人天文学者 オーレ・レーマー (Ole Römer) ** で, そのころ, 彼はイオやその他の木星のガリレオ衛星を研究していた. 彼は その時, 光速の具体的な数値を求めてはいない. 地球からのその衛星までの距離についての信頼できる値がわからなかったこと, また, タイミングの測定が不正確だったことが理由である. 数値が得られていない状況は, クリスチャン・ホイヘンス (Christiaan Huygens) やエドムンド・ハレー (Edmund Halley) らの仲間たちにより, すぐに, 改善された. (Figure 3) を用いて, レーマーの方法を導出してみてください.) レーマーの時代には, すでに, 光が太陽から地球に届くまでに8分強かかることがわかっていた. このことは, 約50年後の1726年になって, 天文学者ジェームズ・ブラッドリー (James Bradley) により, 非常に見事なやり方で確認された. 英国生まれのブラッドリーが思いついた 光速測定方法は「降雨法」である.

Ref. 3
Vol. I, page ??
Ref. 4
Challenge 4 s
Vol. I, page ??
Ref. 5

雨の落下速度を測定するにはどうすればいいのだろうか. こうもり傘をさして, 足早に雨の中を歩き, 雨が落ちてくる角度 α と自分自身の速度 v を測定する (歩きながら, できれば暗い背景に対して, あなたの右か左の雨を見れば, 角度がはっきりわかるでしょう) . その時, Figure 4に示すように, 雨の速度 c は (近似的に) ,

$$c = v/\tan\alpha \,. \tag{1}$$

と書ける. サーフボードや船の上にいるときの風速も同様に測定できる. 光速の測定も同じである. この場合は, Figure 4のように, 地球の軌道の上方の星からくる光と地球の運動の間の角度を測定すればよい. 地球は太陽と星に対して運動しているので, その角度は90°ではない. このずれを 光行差という. 光行差は6か月を隔てて測定した結果と比較すると簡単に決定できる. 光行差の角度は20.5″ である (現在, 小数点以下5桁の精度で測定できる). 地球の公転速度***

---

* 生涯, そして, 1638年にルネ・デカルト (René Descartes) は, 原理的に光の速度は無限であると主張していた. しかし, 1637年, 彼はスネルの法則の説明ですでに有限の値を仮定していたのだ. このことがいかに哲学者を混乱させていたがわかる. 実際, 1634年に, デカルトはベークマンにこう書いている. 「もし, 光の速度が有限であることを証明できたら, 私は『哲学について無知』であることをきっぱりと認めよう」. 彼の言う通りだ.

Ref. 2

** オーレ・レーマー (Ole (Olaf) Römer) (b. 1644 オーフス, d. 1710 コペンハーゲン), 著名な天文学者. ルイ14世時代, パリのドーフィン大学で教鞭をとる. この光測定法は, 以前, 彼が助手を務めていたイタリア人天文学者ジョバンニ・カッシーニ (Giovanni Cassini) によるものである. レーマーは, すべてのプロテスタント学者 (例えば, クリスチャン・ホイヘンス (Christiaan Huygens) 同様, この測定法を続けていたが, 1681年パリを去ることになり, この仕事は中断する. デンマークに戻り, 火災によりすべての測定ノートは失われてしまう. 結果的に, 彼はその方法の精度向上を続けることはできなかった. 後に, デンマークの重要な天文学者, 宗教改革論者になる.

*** こうもり傘は, 1726年当時, イギリスでは珍しかった. こうもり傘がおしゃれになったのは, 中国から入ってきてからで, 時代的にはもっと後のことだ. 従って, こうもり傘の部分のお話はでっち上げである. 実際にブラッドリー (Bradley) がこのアイデアを思いついたのは, テムズ川を帆走していた時, 動いている船上theでの風は明らかに地上での風と違うと気づいた時だった. 何年もかけて, ブラッドリーは50個の恒星, 中でも, りゅう座ガンマ星の観測をしてきていた. その期間を通して, 悩まされてきたのが光行差の符号であった. 彼が予想していた効果, つまり, 星の視差の符号と全く逆だったのだ. 黄道上で星の光行差も視差も, 1太陽年の間に小さな楕円を描くが, その方向が異なっている. なぜだかわかるか? テムズ川の旅の後, ブラッドリーは観測結果を理解した. ところで, 公式 (1) は, 正しくは $c = v/(\tan\alpha\sqrt{1 - v^2/c^2})$ である. なぜか?

Challenge 5 s
Challenge 6 s

地球の速度を決定するのには, 太陽からの距離をまず決める必要がある. もっとも簡単な方法はギリシアの哲学者サモスのアリスタルコス (Aristarchus of Samos) (*c.* 310 to *c.* 230 BCE)の方法である. 月がちょうど半月の時, 月と太陽の間の角度を測定する. その角度のコサインは, 太陽まで

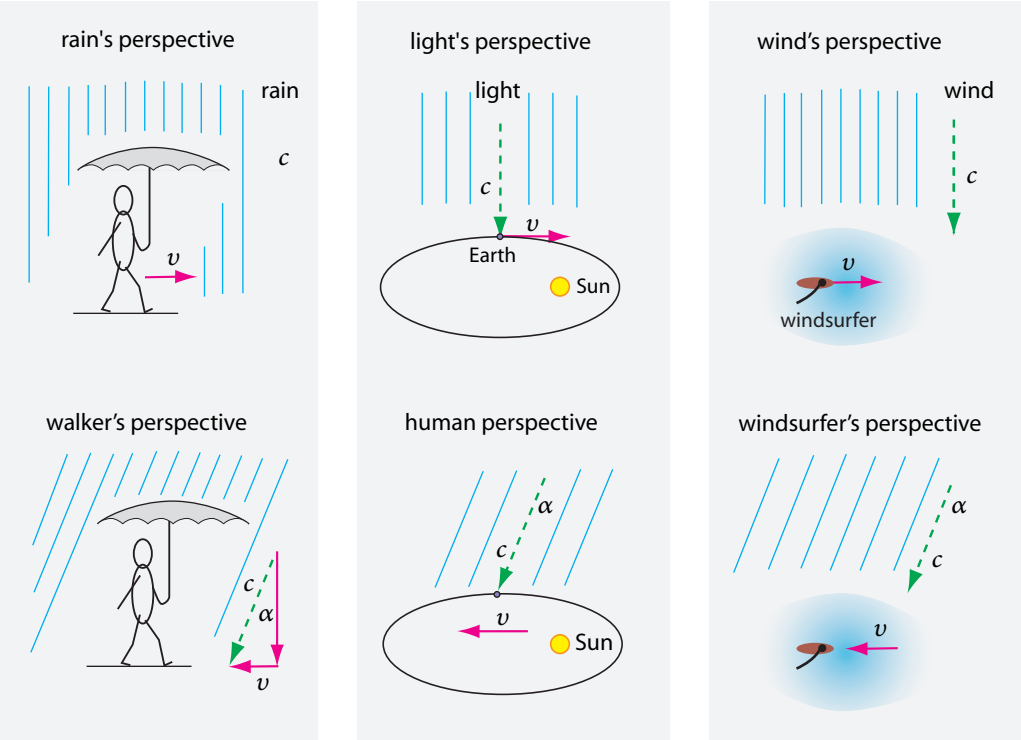


FIGURE 4 雨の中を歩く人やウィンドサーファーの光速測定法

$v = 2\pi R/T = 29.7\,\mathrm{km/s}$ を用いると, 光の速度が得られる.

▷ (真空中の) 光の速度は$c = 0.300\,\mathrm{Gm/s}$, または$0.3\,\mathrm{m/ns}$, または $0.3\,\mathrm{mm/ps}$, または1080 million km/hである.

人類が作った物体で最高の速度を出した物, つまり, 太陽を 253 Mm/h = `70.2 km/s で周回する Helios II 衛星や約 3 nm/sの子供の成長速度, 約0.3 pm/sの洞窟内の石筍と比べると, これは驚くべき値だ. 光速を測定すること, それ自体が科学である理由がわかるだろう.

1849年, イッポリート・フィゾー (Hippolyte Fizeau) (b. 1819 パリ, d. 1896 ヴァントゥイユ)は光の速度を初めて正確に測定した. 彼の導出した

Vol. I, page ??
Challenge 7 s

の距離に対する (それ以前に決定された) 月までの距離の比になる. この説明は自分で行ってください.

Ref. 6
Page 294
Challenge 8 s

アリスタルコスのこの角度はほとんど直角になってしまう (太陽が無限大の距離なあるならそうなるだろう). ヒッパルコス (Hipparchus) が 130 BCE年頃行ったこの問題についての広範な議論で述べているように, これを精度よく測るには優れた装置が必要である. この角度を正確に測定できるようになったのは17世紀後半になってからで, 89.86°であることがわかった. 太陽までの距離と月までの距離の比は400である. 現在では, 惑星のレーダー測定のおかげで, 太陽までの距離は, 30 メートルという驚くべき精度でわかっている. 月までの距離となるとセンチメートルに近い誤差である. どのようにしてこれを達成できたか想像できますか?

Ref. 7

アリスタルコスは太陽と月の半径が地球の半径の何倍になるかも決定した. アリスタルコスは傑出した思想家であった. 地動説を提唱したのは彼がさいしょであったし, 星は遠方にある別の太陽であるとも唱えたらしい. これらのアイデアに対し, 彼の同僚たちは, 不敬の罪で死を宣告されるべきだと訴えた. 僧であり天文学者である ニコラウス・コペルニクス (Nicolaus Copernicus) (b. 1473 ソーン, d. 1543 フラウエンベルグ) が2000年後, 地動説を唱えた時, このアイデアがアリスタルコスの思い付きであると知りながら, 彼のことについては触れなかった.

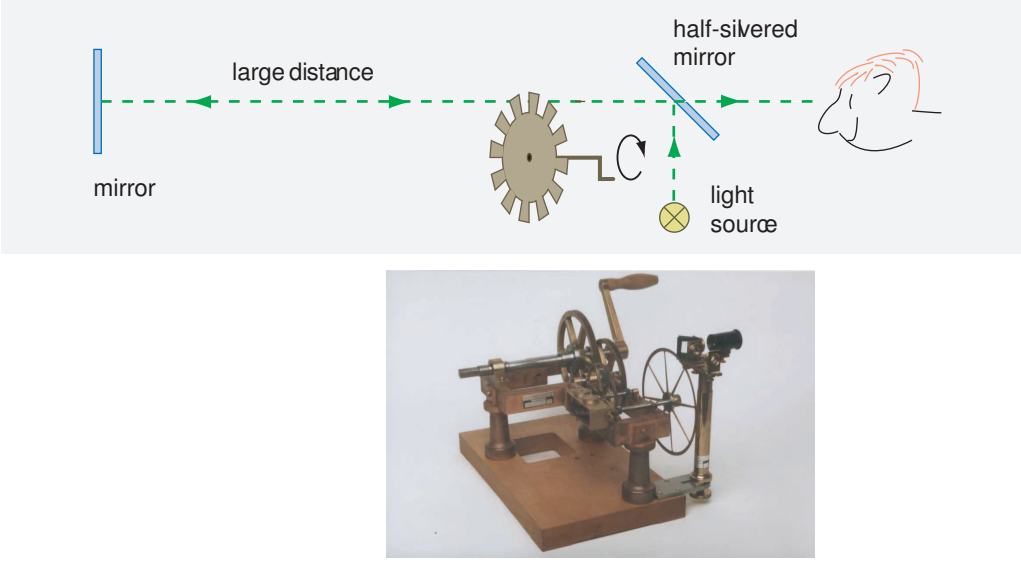


FIGURE 5 光の速度を測定するためのフィゾー (Fizeau) の装置 (写真© AG Didaktik und Geschichte der Physik, Universität Oldenburg)

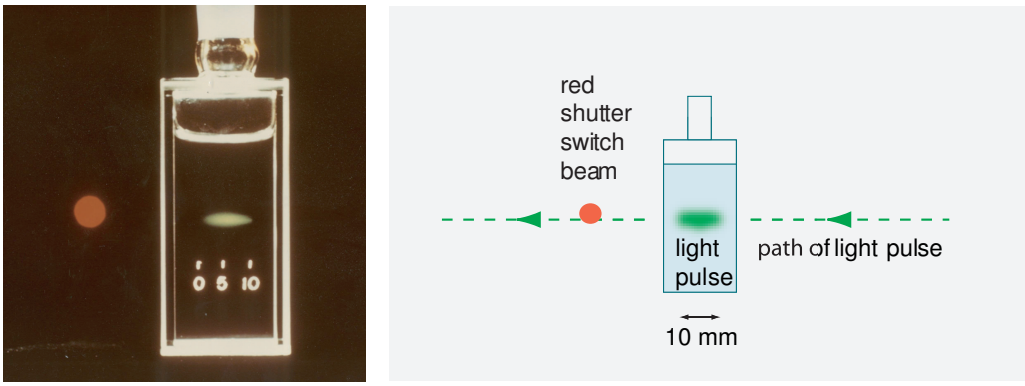


FIGURE 6 乳白水の入った目盛り付瓶を右から左へ動く緑色パルスの写真 (写真 © Tom Mattick)

値は, 現在のものより5 % 大きいだけだった. 彼は遠くに置かれた鏡に向けて光ビームを送り, 光が戻ってくるまでの時間を測定した. 電気機器を使用せずに, フィゾーはどうやって時間を測定したのだろうか. 実は, 弾丸の速度を図る方法と同じ考え方を使用した. この答えの一部をFigure 5に示す. (鏡はどのくらい離れていないといけないか.) ジャン・フレルクス (Jan Frercks) は, 現代のやり方で彼の実験をやり直し, 2 %.の精度を達成した. 現在, この実験はずっと簡単になっている. 電気力学の章で, 2台の標準UNIX またはLinuxコンピュータをケーブルでつなぎ, 'ping'コマンドを用いることでどうやれば光速が測定できるかを示す.

Vol. I, page ??
Ref. 8
Vol. III, page ??

光の速度は非常に速いので, 日常生活で, 光速は有限であることを証明するのは困難である. これを証明する最も美しい方法は, 走っている車や空気中を飛ぶ弾丸の写真を撮影するのと同じで, 視野を横切り飛ぶ光の写真を撮ることである. Figure 6にその最初の写真を示す. これは, 1971年, 市販のレフレックスカメラで撮影されたもので, 撮影者が発明した非常に高速なシャッターを使用して

Ref. 9

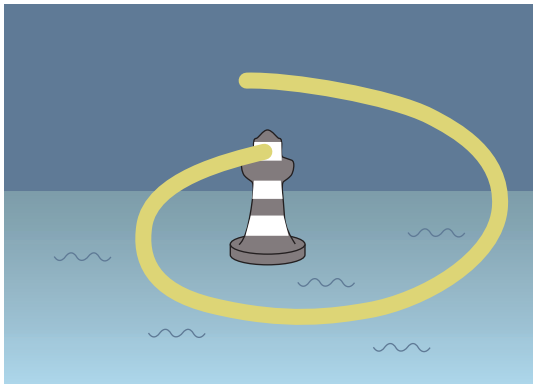


FIGURE 7 光の速度が有限な時の結果. ただし, 図にだまされないようにしてください. – 光は本当は光源から直進し, 図に描かれた曲線に沿っていうごいているのではありません. 回転して水を出しているスプリンクラーと同じことが起きています.

TABLE 1 光の運動の性質.

光についての観測結果
光は真空中で進む.
光はエネルギーを運ぶ.
光は運動量を持っている：光は物体に衝撃を与える.
光は角運動量を持っている：光は物体を回転させることができる.
光は乱すことなく他の光と交差する.
真空中の, 光の速度は c = 299 792 458 m/s, つまり, 30 cm/ns であり, そして, どこでも, いつでもこの値である.
真空中の光は, 必ず, どの物体より速く動く.
光の固有速度は無限大である. Page 43
光パルスの速度, つまり, 真の信号速度は波頭速度であって, 群速度ではない. 真空中では, 波頭速度は, いつでも, どこでも, cである. Vol. III, page ??
光ビームとは波長が無視されたときの近似である.
光ビームは, 物質から遠く離れていると, 直線になる.
影は, 際限ない速度で動くことができる.
通常の強度より強い光は, 波である. 極端に強度の弱い光は粒子の流れである.
物質中では, 光の波頭速度とエネルギー速度は大体 c である.
物質中では, 光パルスの群速度は負, ゼロ, 正または無限大の値をとり得る.

いる. もっとも注目に値するのは, 電子機器をまったく使用していないところである. (どのくらい高速のシャッターが必要か. どうすればこのようなシャッターを作れるか? どのようにして確実にシャッターチャンスをつかまえるのか?)

Challenge 9 s

光の速度が有限であるということは, Figure 7のように, 高速で回転している光ビームは曲がることを意味します. 日常生活では, 光の速度が高速で, 灯台の光源の回転がゆっくりしているので, このような現象にはほとんど気付きません.

つまり, 光は極めて速く動くが, その速度は有限である. 例えば, 光は稲妻より速い. このことは自分で確かめることができる. 一世紀にわたり, 光の速度測

Challenge 10 s

定の精度はだんだん向上し,

$$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m/s}. \tag{2}$$

という値になっている. この値は, 現在, 厳密に, 定義として固定されており, メートル値も1983年以来, c を用いて定義されている. c の近似値は0.3 Gm/sまたは30 cm/nsである. Table ?? に光の運動についての現在知られている知見についてまとめておく. このうち2項目の驚くべき性質は19世紀の後半に発見された. Ref. 10 これらは, いわゆる, 特殊相対論の基礎になっている.

レーザーパルスのボール, 鏡のラケットでテニスをできるか

> Et nihil est celerius annis*
> メタモルフォセス, メタモルフォセス.

いままで行われたすべての実験, たとえば, パルサーから放出される電波や光波, 加速器の粒子から放出される光, ガンマ線バーストの光のどの実験においても, 真空中の電磁輻射の速度は, 輻射の周波数, 偏極, 強度に依存しない. 光速は, 少なくとも, 小数点以下20桁の精度で, 周波数に依存しない. 異なった性質の光が, 数十億年前に出発し宇宙を旅してきても, 仲良く到着する. また, 別の実験では, 光が空間のどんな方向に放出されても, その速度は少なくとも小数点以 Ref. 13 下21桁の精度で同じであることを示している しかし, この光速不変性はわかりにくい.

石をできるだけ速く遠くまで投げるには, 走りながら投げればいいことは誰もが知っている. 石の対地速度は, 走らない時より, 速くなることは直観的にわかる. テニスボールを打つ時も, 素早いほうがボールは速くなる.

しかし, 最初, 誰もが驚くのは, 実験によれば, 動いているランプから発せられる光も, 静止しているランプからの光と同じ速度を持つ. これを証明する一番簡単な方法は空を見ればいい. 空には多くの二重星がある. この星は2つの星が互いの周りを楕円を描いて回転している. これらの二重星系の中には, 楕円を (ほとんど) 真横から見るような配置のものがあり, この場合, それぞれの星は私たちに近づいたり, 私たちから遠ざかることを周期的に繰り返している. もし, 光速が光源の速度により変わるのなら, ある位置から発せられた光が, 別の位置から発せられた光に追いつくことがあってもおかしくない. そのため, それによる奇妙な現象を観測することになるだろう. 特に, 楕円形の軌道なんて観測できないだろう. しかし, このような奇妙な効果はなく, 完全な楕円が観測されている. ウィレム・ドゥ・ジッター (Willem de Sitter) は1913年にすでにこの美しい説 Ref. 14 明を行い, 多くの二重星に対し, このことが正しいことを確認した.

つまり, 真空中において, 光は光より速くなることはない.

▷ 真空中の光ビームはすべて同じ速度を持つ.

特別に考えられた多くの実験により, 高い精度で, この結果が確かめ Ref. 11, Ref. 15 られている. 光の速度は, 1 m/s以上の精度で測定できるが, ランプの速度が290 000 000 m/s以上であっても, 放出される光の速度は変わらない. (どん Challenge 11 s なランプを用いたかわかるか?)

* 「老化より速いものはない」 Book X, 520節

FIGURE 8 電動モーターで動く装置は, どれも, 光の速度が不変であることを示す. (© Miele, EasyGlide)

日常生活において, こちらに向かって走りながら投げられた石やテニスボールは, 静止または遠ざかりながら投げられた場合と比べ, 球は早く到着する. しかし, 真空中の光ではこんなことは起きない. どんな実験でも, ランプに向かって走っても, ランプに対し止まっていても, ランプから遠ざかっていっても, ランプからの光の速度は同じになる. また, これらの実験は可能な限りの精度で行われている. 観測者の速度が最大であっても, 到着する光の速度は同じである.

Ref. 16

動くランプを用いる場合, 観測者が動く場合のいずれの実験でも, 誰が, どこで, いつ観測しても光の速度はまったく同じ強度になる. たとえ観測者同士が互いに動いていても, 観測者が光源に対して動いていてもこのようになる.

▷ 真空中の光の速度は不変である.

真空中の光の速度は, 実際, 理想的完全な速度の測定標準になる. ところで, 「光の速度」は「レーダーの速度」や「電波の速度」とも言える. なぜそうなるのかは, 電気力学の部分で述べる.

Vol. III, page ??

光の速度はニュートリノの速度とは非常に近い. このことは, 1987年, 超新星の観測により鮮やかに示された. 光のきらめきとニュートリノのパルスが地球に到達したのは12秒しか違わなかったのだ (この差は, 速度差と2つのきらめきの出発時間の差によるもと考えられる). 超新星が $1.7 \cdot 10^5$ 年離れていて, 同時に出発したとすると, 2つの速度差は小数点以下何桁目で初めて差がでてくるか?

Challenge 12 s

Ref. 17

他にも, 光速不変の実験証拠がある. 電気掃除機などの電磁気器具はすべて光の速度が不変であることを示している. 光速が不変でなかったとしたら, 日常生活のモーターやスピーカーで見られるような磁場が電流より生じるという現象は起きない. 実際, 何人かの研究者はこのようにして, 最初, 不変性の導出を行った. ドイツ - スイス人物理学者アルベルト・アインシュタイン (Albert Einstein) が光速不変性が物体の運動の観測結果とも一致することを示したのは, この結果が得られた後でしかない. この章ではこの一致をチェックする. 相対性と電気掃除機などの機械との関係については, 電気力学の章で探検しよう.

Vol. III, page ??

光の運動と物体の運動は密接に関連している. もし, 光の速度が不変でなかったとしたら, 観測者は光の速度で運動が可能であろう. なぜか. 光は波なの

FIGURE 9 アルベルト・アインシュタイン (1879–1955).

で, 光波とほとんど同じ速度で運動する観測者は, ゆっくり動く光波を観測するだろう. そして, 光速と同じ速度で動く観測者は, 凍り付いた波を見るだろう. しかし, 実験や電磁気学の性質からは, いずれのことも許さない. すなわち, 観測者も物体も光の速度にたどり着くことはできない.

Vol. III, page ??

▷ 真空中の光の速度は速度の上限である.

観測者や物体はいつも光よりゆっくり動く.

まとめると, 真空中の光の速度は速度の上限で不変である. たとえ, テニスコートが十分広く, 予算が十分あっても, 光でテニスすることは不可能である. たとえ, できたとしても, 全然, 面白くないだろう.

Challenge 13 s

アルベルト・アインシュタイン

アルベルト・アインシュタイン (b. 1879 ウルム, d. 1955 プリンストン)は傑出した物理学者の一人であった. 1905年, 彼は3つの重要な論文を発表した. 1つはブラウン運動に関するもの, 2つ目は特殊相対論に関するもの, 3つ目は光量子の着想に関するものであった. 1番目の論文は物質は分子と原子から成ることを明確に示し, 2番目の論文は光速の不変性を示した. 3番目の物は量子論の出発点となるものの一つだった. いずれの論文もノーベル賞に値するものだが, 3番目の論文でしか受賞しなかった. また, 1905年有名な公式 $E_0 = c^2 m$ を証明した (1906年の初めに論文として発表された) が, それ以前に, 他にもこの式を提唱した人がいた. アインシュタインは量子力学の創始者の一人であったが, 後に, それに反対するようになった. それでも, 彼の友人, ニールス・ボーア (Niels Bohr) との有名な議論のより, 量子力学が反直観的な側面を持つことをはっきりさせる助けとなった. 後に, 彼は磁気が物質内部の運動によるものであることを示したアインシュタイン - ドゥ・ハース効果を説明した. 多くの発見の後, 1915年と1916年にアインシュタインは彼の最大の業績, 科学上もっとも美しく, 最も卓越した仕事である一般相対論を発表した. 残りの人生40年, 彼は運動の統一理論を探求したが, 徒労に終わった.

Page 69

Page 126

著名なユダヤ人であることから, アインシュタインは, 国家社会主義運動から格好の攻撃と差別の的にされ, 1933年, ドイツからアメリカ合衆国へ移住した. その時以来, マックス・プランク (Max Planck) のような一部の人を除き, ドイツ人との接触を絶った. 彼は, 死ぬまで, 寝室にスイスのパスポートを保管していた. 彼は偉大な物理学者と同時に, 偉大な思想家でもあった. 物理以外の話題に

TABLE 2 どうすれば, 自然には最大のエネルギー速度 c が存在することを納得させられるか. この表 を, 100ページの最大力の表や第4巻 ??ページの最小作用の表と比べよ.

命題	テスト方法
最大エネルギー速度値 c は観測者によって変わらない.	すべての観測結果を調べよ.
c を超える局所エネルギー速度は観測されない.	すべての観測結果を調べよ.
c を超える局所エネルギー速度を作り出すことはできない.	すべての試みを調べよ.
c を超える局所エネルギー速度は考えられない.	すべてのパラドクスを解け.
最大の局所エネルギー速度値 c は原理である.	これから特殊相対論を導け. すべての結果が奇妙であっても, 観測に基づく検証がされているかを知らべよ.

Ref. 19 ついての思想集は一読に値する. しかし, 家庭生活はひどい状況で, 家族を不幸にした.

アインシュタインを手本にしたい人は, まず, 発表した多くの論文を読むべきだろう. 彼は野心家でもあり, 勤勉であった. 一方で, 多くの論文には誤りがあり, 次の論文でそれを修正しようとし, そして, また, それを行うということを繰り返した. 非常に頻繁にそんなことが起きるので, 自嘲していた.

アインシュタインは, 実際, 可能な限り短い時間に可能な限り多くの誤りを作り出す人が天才であるという有名な定義を自覚していた.

不変上限速度とその結果

実験や理論によると, 観測者は光の速度に到達することはできない. これは, 光速にたどりつける物体はないということと同じである. 言い換えれば, 光は速度の標準であるというばかりではなく, 自然に存在する最大の速度でもある. より正確には, 自然のどんな物理系, つまり, 局在化した質量やエネルギーの速度 v は,

$$v \leqslant c \,. \tag{3}$$

という条件に束縛されている. この関係式が特殊相対論の基本で, 実際, 特殊相対論の完全な理論はこれに含まれる.

考えてみると, 不変上限速度 c はそれほど驚くべきことではない. 速度が測
Page 95 定できるためにはこのような不変量が必要なのである. さらに, 不変最大速度の存在は多くのおもしろい結果を意味する. この速度は, 観測者に依存する時間や長さ, 質量とエネルギー間の深い関係, 事象の地平線や反物質の存在につながってゆく.

アンリ・ポアンカレ (Henri Poincaré) は1895年, すでに, * 不変性の観点の議

* アンリ・ポアンカレ (Henri Poincaré) (1854 ナンシー –1912 パリ), 著名な数学者・物理学者. ポアンカレは当時最も業績のあった科学者の一人で, 相対論, 量子力学や多くの数学の分野の進展に

論を相対性理論と呼んでいて, この名称は1905年にはよく知られていた. アインシュタインはこの理論がこの名で呼ばれていることを残念がっていた. 彼は 'Invarianztheorie', つまり, 「不変性理論」という名前の方が好きだったが, 名称
Ref. 20 変更はもうできなかった. それでアインシュタインは重力を含まない運動の記
Ref. 17 述を特殊相対論と呼び, 重力を含む運動の記述を一般相対論と呼んだ. いずれの分野も直観と反する結論を持つ魅力的な成果だった. *

自然には, 不変上限速度は本当に存在するのだろうか. Table 2 に, この考え方を受け入れるには3つの観点からの調査が必要であることを示す. まず, 上限速度以上の速度は観測されないこと, 第2に上限速度以上のエネルギー速度は観測不可能であること, 第3に, 変かもしれないが, 光速不変性から導かれるすべての結果は自然世界に当てはまっていることである. 実際, この方法が特殊相対論を定義しているのだ. この章と次の章では, すべての, これを行うことに充てる.

光速の不変性は, 石の動きを記述するガリレイの力学と完全に対比されるものである. ガリレイの力学は非常に高速になると誤りであることが証明されている. 低速では, 誤差が小さくなり, ガリレイ力学は良好である. しかし, すべての速度で正しい記述を要求すると, ガリレイの力学は放棄しなければならない. たとえば, テニスをしていて, 正しくボールを打てば, その速度を速めることも, 緩めることもできる. しかし, 光ではこんなことはできない. たとえ, 高速で飛ぶ飛行機に鏡を搭載し, 光を反射させても, 光はパイロットと地上の観測者の両者に対し同じ速度で遠ざかる. すべての実験で, 光のこの奇妙な性質を確認されている.

バスを運転し加速したら, 対向車線を走る車もどんどん高速で通り過ぎるようになる. 光に対しては, 実験ではそうならないことが示されている. 光はいつも同じ速度で通り過ぎる. 現在の $2 \cdot 10^{-13}$ という測定精度をもってしても, 速度
Ref. 13 の違う観測者が光速の差異を認識できたということはない. 光は, 車や他の物体のようにふるまわない. この奇妙な振る舞いを, もう一度, 実験で確認する.

測定では光速の不変性は明確なのに, どうして, 疑いたくなるのだろうか.
Vol. I, page ?? OとΩ (オメガと読む) の二人の観測者が, ちょうど, 対向車線を走る2台の車ように, 相対速度 v で動いている. 通り過ぎる瞬間に, Oがライトを一瞬点灯させたとする. 観測者Oにとって, フラッシュ光は, 位置 $x(t)$ だけ動くのに対し, Ω にとっては位置 $\xi(\tau)$ だけ動く. 光速は二人にとって同じだから,

$$\frac{x}{t} = c = \frac{\xi}{\tau} \,. \tag{4}$$

となる. しかし, この状況では, 明らかに, $x \neq \xi$ である. つまり, 光速不変性は $t \neq \tau$ を意味している. つまり,

▷ 互いに動いている観測者にとって, 時間は異なる .

Challenge Ref. 24 時間は一つではない. 多くの実験で確認されているこの驚くべき事実は, 1905年に, 初めて, アルベルト・アインシュタインにより明らかにされた. すべての観

貢献した.

Ref. 21 * 相対論の最もすばらしい入門書には, アルベルト・アインシュタインにより, 書かれたものがある. それに匹敵するくらい素晴らしいSchwinger, Taylor, Wheelerの教科書が出てくるまでにほとんど1世紀かかった.
Ref. 22, Ref. 23

測者は自分の時間を持っている. 2人の観測者が相対的に動いていない場合においてのみ, 2人の時間は一致する. 多くの人が c の不変性について気付いていたが, 時間は観測者に依存していることを勇気を持って言い, その結果を直視し考えを巡らせたのは若きアインシュタインだけであった. それと同じことをやってみよう.

1つの所見は整っている. 光速 c は速度の上限である. これが言っているのは

▷ 真空中の光の速度は, 速度の上限である.

実際のところ, 物質中では, 粒子は光の速度より速く動くことができる. といっても, その速度は真空中の光の速度よりは遅い. こういった状況はよく観測される.

固体や液体中では, 光の速度は, 普通, 真空中での速度より2, 3倍遅い. 特別な物質ではさらに遅くなることもある. 太陽の中心では, 光の速度は約 30 km/year = 1 mm/s と見積もられており, 実験室でも, ある物質中の光速の測定結果は 0.3 m/sになる.

Ref. 25

Ref. 26

飛行機が空気中を音速より速く飛ぶと, 後方に, 円錐形の衝撃波が発生する. 物質中を荷電粒子が物質中の光の速度より速く動くと, 円錐状の輻射, いわゆる, バビロフ・チェレンコフ光 *(Vavilov–Čerenkov radiation)* が放出される. バビロフ・チェレンコフ光はよく観測され, たとえば, 原子炉の水が青く光る原因はこの光で, また, 透明なプラスチック中を高速粒子が通過しても発生し, 加速器実験の検出器として利用される.

Vol. I, page ??

この章と次の章では, 「光速 (光の速度)」という言葉を使用した場合は, 真空中の光の速度を意味することにする. 空気中の光の速度は真空中の速度より1パーセント程度小さいだけなので, ほとんどの場合, 空気と真空中での光の速度の差は無視できる.

特殊相対論を一言で

光の速度はすべての観測者にとって一定不変である. Figure 10を用いると, 二人の観測者が測定する量のすべての関係を導ける. この図は, 時間と空間内を, 一定の相対速度で動く二人観測者を示している. 第1の観測者が第2の観測者に向かって, フラッシュ光を送り, 第2の観測者の位置で, 光は第1の観測者に反射して返される. 光速は不変なので, 離れた二人の観測者の時間と空間座標を比べるのに利用できるのは光だけである. また, (2つの離れた物差しのように) 2つの離れた時計の比較や時刻合わせに使えるのも光または電波のフラッシュだけである. 光の速度は不変なので, 図示すると同じ方向への光の経路はすべて平行になる

Ref. 27

二人の観測者の相対速度は一定なので, 定数因子 k により事象の時間座標が関連付けられる. (なぜその関係は線形であるか.) 光フラッシュが, 第1の観測者の時計で時刻 T に発せられたとしたら, 第2の観測者の所へ時刻 kT に到着し, 時刻 k^2T に第1の観測者に戻ってくる. 図から,

Challenge 15 s

Challenge 16 s

$$k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad \text{or} \quad \frac{v}{c} = \frac{k^2-1}{k^2+1} \,. \tag{5}$$

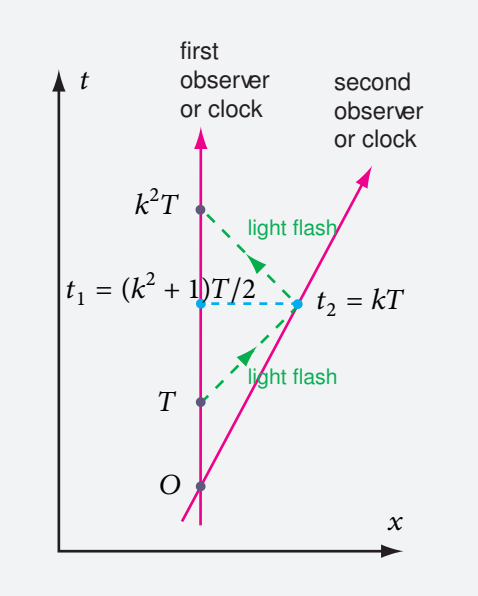


FIGURE 10 特殊相対論のエッセンス, 時間の遅れとローレンツ変換などを含んだ図

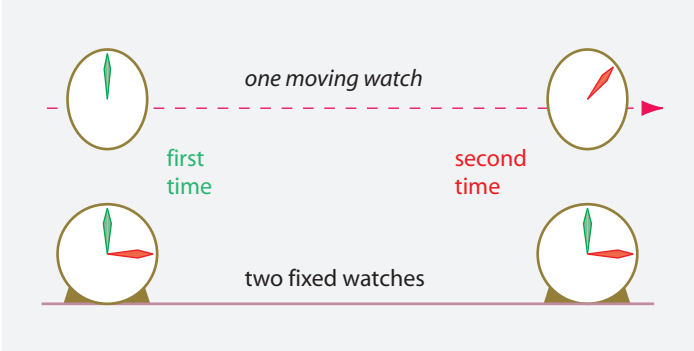


FIGURE 11 運動している時計はゆっくり進む. つまり, 動いている時計は, 静止している時計よりゆっくり時を刻む.

Page 27 であることがわかる. この因子はドップラー効果で再び登場する. *

Figure 10は光が反射された事象に対し, 第1の観測者は時刻 t_1 を測定する. しかし, 第2の観測者は同じ事象をに対し, 別の時刻 t_2 を測定する. 相対運動をする2人の観測者にとって時間は異なる. この効果を時間の遅れと呼ぶ. 言い換えると, 時間は相対的である. Figure 11はその効果を図示したものである.

二人の観測者間の時間の遅れの因子は, Figure 10の t_1 と t_2 の値を比べることでわかる.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v) \,. \tag{6}$$

動いている観測者の時間間隔はこの因子 γ だけ, 短い. つまり, この時間因子は1より小さい. 言い換えると,

* 因子 k を用いた相対論の説明をk-計算と呼ぶことがある.

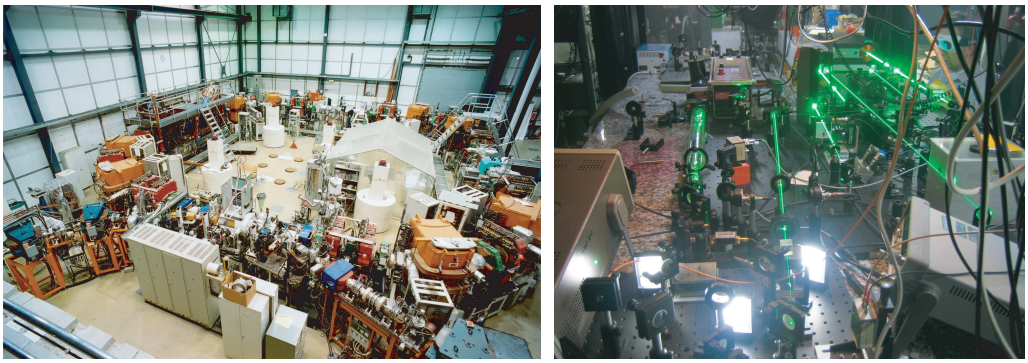


FIGURE 12 動いている時計はゆっくり進む. ストレージリング (左) 中のレーザー (右) で読みだされた動いているリチウム原子は, 高精度で予測と一致する. (© Max Planck GesellschaftのTSR relativity team)

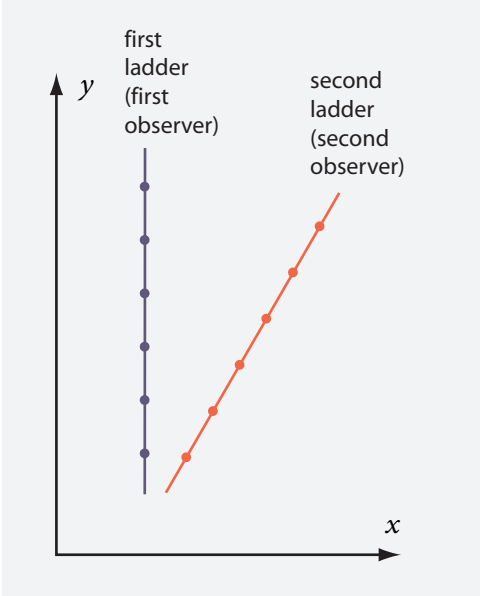


FIGURE 13 二つのはしごの上の観測者は互いに相手のはしごの方が短いという.

▷ 動いている時計はゆっくり時を刻む.

Challenge 17 e

日常生活では, この効果は僅かである. このため, 通常, この時間差は検出できない. しかしながら, 光の速度に近くなると, ガリレイ物理は正しくなくなる. 正しい表現 (6) は, Figure 12の実験により, 100万分の1以上の精度で成り立っていることが示されている. これと同じ因子γは, 質量とエネルギーの等価性を表す公式 $E = c^2\gamma m$ にも現れている. この公式は後に導出する. 式 (5) や (6) は特殊相対論に必要な数学の一部にしか過ぎないが, すべての結果はこれから導ける.

Ref. 28

光フラッシュが第2の観測者から第1の観測者に向けて発射され, 反射して送り返されたとしたら, 第2の観測者は第1の観測者に対し同じことを言うだろう. つまり, 第1の観測者の時計は運動していて, 運動している時計はゆっくり時を刻む.

▷ それぞれの観測者は, 互いに, 相手側の時計の方がゆっくり時を刻ん

でいると観測する.

この状況は, Figure 13に示すように, 平行に置かれていない2本のはしごの段数を比べる2人の人に似ている. いずれのはしごの上の人も, いつも相手側のはしごのほうが短いと観測する. この観測結果は時間の遅れや長さの短縮と基本的
Page 46
には同じ考え方である.

当然, 時間が観測する人により異なるという奇妙な結論を避けるための説明を多くの人が試みた. しかし, 成功した人はおらず, すべての実験結果がこの事実を示している. 時間は相対的である. これらの実験とはどんなものかを見てみよう.

光の加速とドップラー効果

真空中で, 光を加速できるのだろうか. それは意味合いによる. 大部分の物理学者は, まことしやかに, 鏡は光の方向を変えるので, 鏡は光は加速できると言う. 電磁気学の章で, 物質も光を曲げる能力があるので, 加速できることを述べる.
Vol. III, page ??
しかし, これらのどの方法も, 伝播の方向を変えるだけで, 真空中の光の速度を変える力はない. 特に, 光は止めることのできない運動の例である. 他にもこのような例はいくつかある. 挙げられるか?
Challenge 18 s

もし, 光をもっと高速まで加速できたとしたら何が起きるのだろう. 加速可能にするには, 光は質量のある粒子から出来ていなければならない. 光に質量があったとしたら, '質量の無いエネルギー速度' c と光速 c_L を別のものとして考える必要が出てくる. 後者の速度の方が小さく, 質量を持つ光粒子の運動エネルギーに依存するだろう. 光の速度は不変ではなくなるが, 質量の無いエネルギー速度の方は依然として不変である. このような質量のある光粒子は捕獲し, 停止させ, 箱に閉じ込めておくことができるだろう. この箱の内部の照明は不要だろう. その中に, 昼間の明るさを十分閉じ込めることができ, 速度を上げてやると, あくる日の夜も, ゆっくりと光を放つだろう. *

物理学者は質量を持つ光の可能性についてかなり詳細に調べてきた. 観測結果が示す光粒子の質量,の可能性は, 地球上の実験によれば, $1.3 \cdot 10^{-52}$ kgより小さく, 天体物理学の議論によれば, (やや控えめになるが) $4 \cdot 10^{-62}$ kgより小さい. 言い換えれば, 光は重くなく, 光は軽い.
Ref. 29, Ref. 16

ところで, 光が動いている鏡にぶつかった時, 何がおきるのだろうか. この状況は光源が受光者に対し運動している場合に似ている. つまり, 受け手は, 送り手の観測する色とは違った色を観測する. この周波数シフトをドップラー効果と呼んでいる. クリスチャン・ドップラー (Christian Doppler) ** は音波についての周波数シフトについて始めて研究をした. 列車が近づき離れてゆく際に, 警笛の音の高さが変わることはだれもが知っている. これが音のドップラー効果である. これを用いて列車の速度を決定することができ る. Figure 15に示すよう
Vol. I, page ??

* ちなみに, 質量を持つ光は縦偏極モードも持つだろう. これは観測結果に反しており, 光は伝播方向に対し横方向にのみ偏極している.

** クリスチャン・アンドレアス・ドップラー (Christian Andreas Doppler) (b. 1803 ザルツブルク, d. 1853 ヴェネチア), 有名な物理学者. ドップラーは自分の名前が付けられた音や光の効果について研究した. 1842年, すでに, この効果を利用し, 遠く離れた星の色を見ることでその運動を測定することがいつかできるようになるだろうと (正しく) 予言していた. この効果の発見に対し, 1845年と1846年に実験的に確認したものの, ドップラーは1852年に帝国科学アカデミーから追放された. その直後彼は健康を害し, 他界した.
Ref. 30

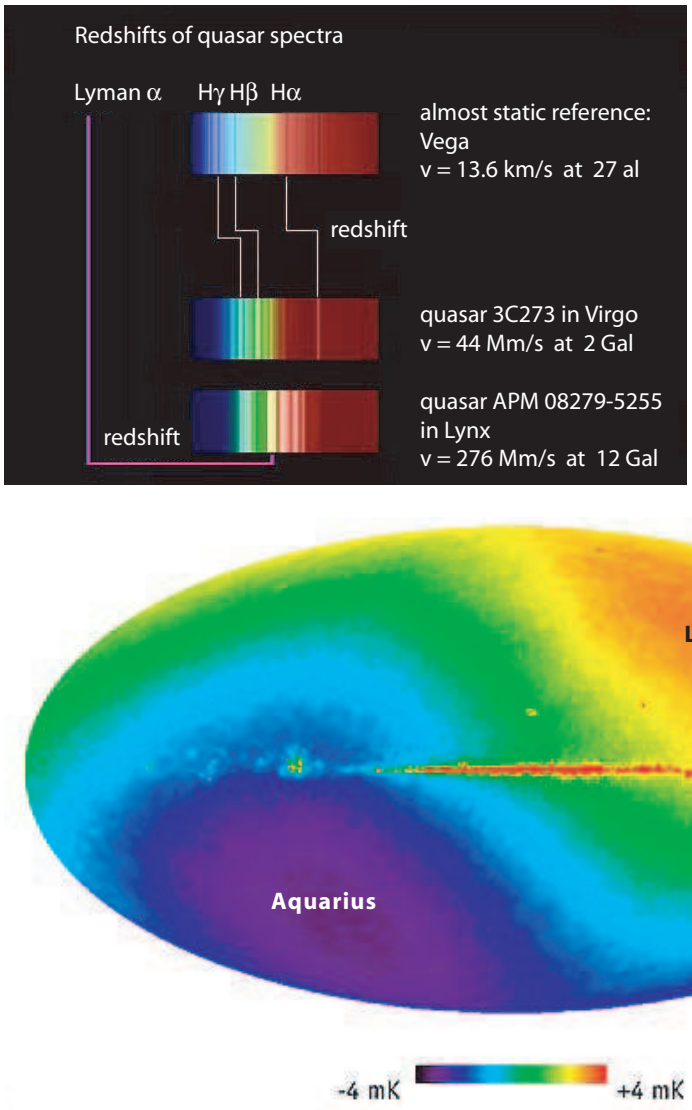


FIGURE 14 上: 二つのクエーサーからの光のドップラー効果. 下: 宇宙空間の地球の運動が引き起こすほぼ黒色の夜空 (宇宙背景輻射) のドップラー効果 (色調を拡大しているので実際の色とは違う) . 後者のドップラー効果のよると, 夜空は実際は微妙に温度変化があることを示している (© Maurice Gavin, NASA) .

に, コウモリ, イルカやクジラは音のドップラー効果を使って獲物の速度を測定し, 超音波システムで血流や胎児の心音を測定できる (赤ちゃんは特に大きい) .

ドップラーは, 初めて, 周波数シフトの考え方を光波にも拡張した. 後述するが, 光は波でもあり, その色は周波数, すなわち, 波長 λ により決まる. 動いている列車の警笛が変化するように, ドップラーは, 動いている光源は, 受け手の場所で, 光源色とは異なった色を示す. 単純な幾何学と, 最大と最小の数の保存から次の結果が導ける.

Vol. III, page ??

Challenge 19 e

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_s} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_r\right) = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_r\right) . \tag{7}$$

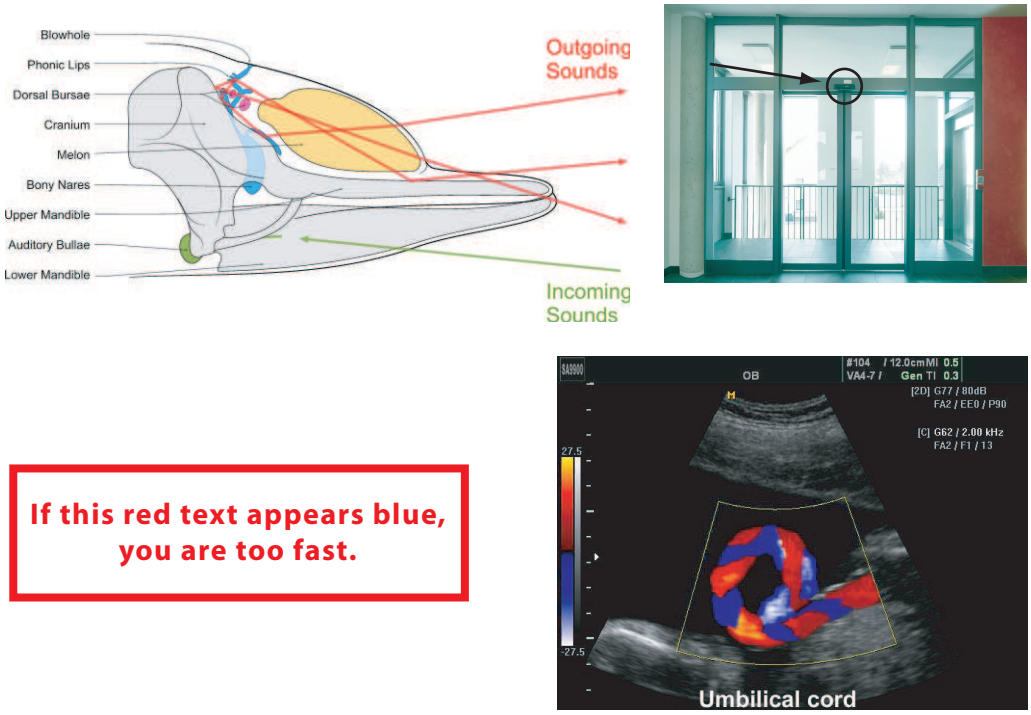


FIGURE 15 イルカのドップラーソナーシステム, 自動ドアのドップラー効果システム, 速度警告板に利用されたドップラー効果, 胎児のへその緒の血流を検出したドップラーソノグラフィ (© Wikimedia, Hörmann AG, Medison) .

この式の変数 v と θ_r はFigure 16に定義してある. 近づいてくる光源からの光は青方偏移し, 遠ざかる光源からの光は赤方偏移する.

色偏移とも呼ばれる光のドップラー効果を最初に観測したのはヨハネス・シュタルク (Johannes Stark) である.* 彼は, 1905年, 運動している原子から放出される光の研究を行った. 一連の実験結果はすべて測定範囲内で色偏移に関する計算結果と一致していることが確認された. その後, 100万分の1の精度で一致していることが示された.

Ref. 31

音波と違い, 色偏移は, 光信号に対し横方向に運動している場合にも観測されている. 黄色の棒を高速に視野を横切る方向に運動させると, 観測者に最接近する直前に, 棒の前端は青に, 後端は赤になる. この色は縦方向 (1次の) ドップラーシフトと横方向 (2次の) ドップラーシフトが結合した結果生じるものである. ある特別な角度$\theta_{\text{unshifted}}$で, 色は同じになる. (純粋に横方向の場合, 波長はどう変わるか. $\theta_{\text{unshifted}}$を速度$v$であらわせ.)

Challenge 20 s

ドップラーにより調べられた色または周波数のシフトは多くの分野で利用されている. 物体は, ほとんどすべて, 電波の反射体になる. 多くの建物で, 人が近づくと自動的に開くドアが設置されている. ドアの上についている小さなセ

* ヨハネス・シュタルク (Johannes Stark) (b. 1874 シッケンホフ-, d. 1957 エッペンシュタット) 1905年, チャンネル線での光学ドップラー効果を発見. そして, 1913年, 現在, シュタルク効果として知られている電場中でのスペクトル線の分離を発見した. これらの2つの発見により, 1919年ノーベル物理学賞を受賞. 1922年, 教授職を去った後, 本格的な国家社会主義者に転向した. 1930年以降, NSDAPのメンバーとして, イデオロギー上の理由により, 他の人々の自然に関する発言を激しく批判したことで知られる. 当然, 存命中から世界中のアカデミック社会から嫌われるようになった.

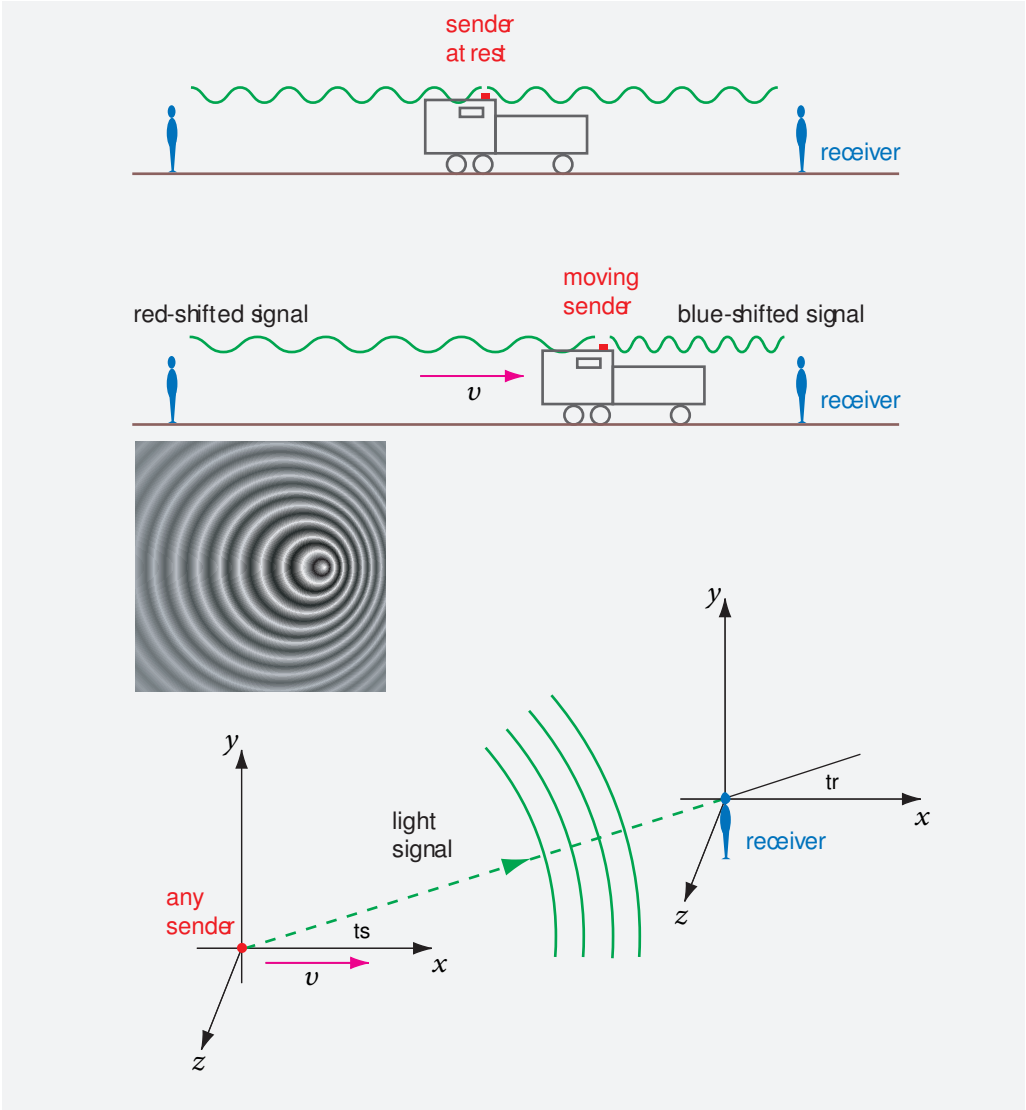


FIGURE 16 1次元と3次元でのドップラー効果を観測するセットアップ. 近づいてくる源から放出される波はより高い周波数で到着し, 遠ざかる源から波の周波数は低くなる. (波の図 © Pbroks13) .

ンサーが近づいてくる人を検知する. このセンサーは電波を放出し, 人により反射される電波のドップラー効果を測定することで動作する. (電波と光は同じ現象であることを後述する.) そのため, 何かが近づいてくる場合にのみドアが開く. また, 警察レーダーは車の速度を測定するためドップラー効果を利用する*

Vol. III, page ??

ドップラー自身が予言したように, ドップラー効果は遠方の星の速度を測定するのに普通使われる (Figure 14参照) . これらの場合, ドップラーシフトは赤方偏移量 z で表される. この量は波長λまたは周波数 f を用い, 次のように定義される.

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{f_S}{f_R} - 1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 \,. \tag{8}$$

Challenge 21 s

* どの位の速度で赤信号が青に変わるのか?

Challenge 22 s 量zをどのように決定するかわかるか? 空にある光源の典型的なzは−0.1から3.5であるが, 10を超えるような大きな値も 見出されている. これに対応する
Challenge 23 s 値を計算できるか. これらはなぜこんなに大きいのか?

太陽の自転とドップラー効果のため, 太陽の片側の縁は青方偏移し, 反対側
Ref. 32 の縁は赤方偏移する. これから太陽の自転速度が計算できる. 自転周期は27日から33日で, 緯度に依存する. ドップラー効果から, 太陽の表面は5分程度の周期で振動していることが示された.

銀河系の回転も, 銀河系の星のドップラー効果を用いて発見された. 天文学者は太陽系が銀河系の中心の周りを2億2千万年かけて一回転している.

光と非常に高速で相対論的速度で動くラケットを用いてテニスをしようとするとどうなるか. このような激しいテニスプレーヤーが存在する. これまでに作られた最高速のラケットは光速の80 %を超える速度を持っていた. 2013年, 強力で短いレーザーパルスを出射してこのラケットは作られた. つまり, パル
Ref. 33 ス幅50 fs, 出力 0.6 ZWのレーザーを10 nmという薄いダイヤモンドライクカーボンに照射した. このようなパルスは真空中に平坦で高速な電子雲を放出し, この雲が, 短時間, 相対論的鏡として作用した. 第2のレーザービームをこの相対論的ラケットで反射させたところ, 光速は変化せず同じであった. しかし, 周波数は約14倍に増加し, 近赤外の色のビームが極紫外になった. この相対論的鏡は, 1 %をはるかに下回る反射率しか持たず, 寿命もほんの数ピコ秒, サイズは約2 µmしかないので, ラケットと呼ぶには少しおこがましいかもしれない.

要約すると, 光の真空速度を変えようとしても, 変えることができるのはその色だけ, つまり, ドップラー効果である. 言い換えると, 光の加速は色の変化
Vol. I, page ?? を引き起こすことができる. この関係は謎を生む. 古典力学では, 光が星のような大質量物体を通過しようとすると, 反射される. この偏向はドップラーシフト
Challenge 24 s を生じるのだろうか?

光と音のちがい

光のドップラー効果は音のドップラー効果よりずっと基本的である. たとえ, 光速が不変であることが知られていなかったとしても, ドップラー効果だけで互いに運動している観測者にとって時間は異なることを示すことができるだろう. どうしてだろう.

時間は時計から読み取る. 相手の時計と自分の時計が合っているかを確認するには両方の時計を 見る必要がある. つまり, 時刻を合わせるには光を使用す
Ref. 34 ることになる. ある観測者から別の観測者へ送られた光の色が二人の観測者にとって違っている場合には, 二人の時計の動きは必ず異なっている, つまり, 二人にとって時間が違うことを意味する. これを理解するには, 光源そのものが, 非常に高速に時を刻む時計であることに注目する必要がある. 同じ時計を持つ二人の観測者にとって, 同じ光源からの光の色が違って見えるなら, 違った振動数を測定していることになる. 言い換えれば, 互いに動いている観測者にとって
Page 24 は時間が異なっている. 実際, ドップラー効果の式 (5) には, 光速不変性を始めとするすべての特殊相対論を含んでいる. (観測者に依存する周波数と観測者に依存する時間の間の関係が音のドップラー効果に落とし込めることを示せるか?
Challenge 25 s)

光の振る舞いは特殊相対論を含んでいるのに, なぜ, 空気を伝わる音には含まれていないのか. 答えは光はエネルギー運動の上限だからである. 実験によれ

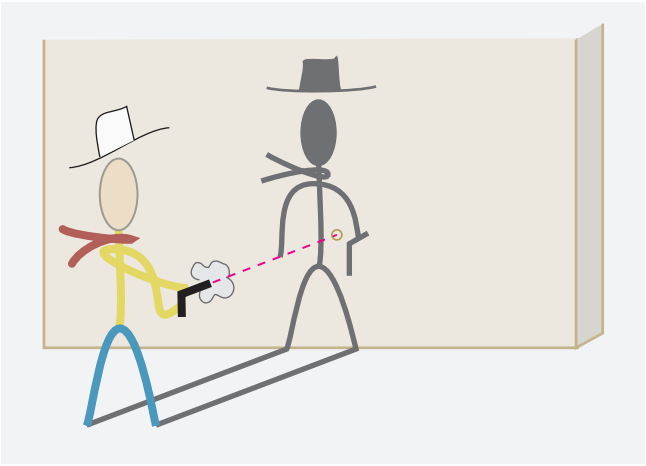


FIGURE 17 ラッキー ルーク

は, 超音速飛行機はあるが, 超光速ロケットはありえない. つまり, c が光速を表す場合, $v \leqslant c$ のように c が極限値になるが, c が空気中の音速の場合は, c は上限値にはならない.

しかし, 音がエネルギーの上限速度になる系が, 自然には一つだけある. 結晶固体中の転位運動では音速が上限速度になる. (この運動については後で詳しく述べる.) その結果, 特殊相対論が転位についても成り立つ. 光速を音速に置き換えればいいのだ. 実際, 転位はローレンツ変換に従い, 長さの短縮も示され, 有名なエネルギー公式 $E = c^2\gamma m$ にも従う. これらすべての効果において, 光速が一般の物理系において果たす役割を, 音速 c が同じように果たしている.

Vol. V, page ??

特殊相対論は, 光りより速く動くものはないということを基本にしているとしたら, このことを注意深くチェックする必要がある.

自分の影より速く撃てるか

> Quid celerius umbra?*
>
> 古言

ラッキールークが Figure 17 に示すように, 自分の影より速く撃てるという離れ業をやってのけるためには, 彼の撃った弾が光速より速く飛ぶ必要がある. (彼の手についてはどうか.) ラッキー・ルークを真似るために, 発電所から直接エネルギーを取り, 使える最大のエネルギー用いて, もっとも軽い弾丸として電子を加速するとする. この実験は粒子加速器で毎日行われている. 例えば, フランスとスイスにまたがる, ジュネーブ近郊の円周27kmの大型電子-陽電子衝突装置LEPである. そこでは, 電子と陽電子を加速するために40 MWの電力 (小さな都市の電力量に匹敵する) を用いて, 16 nJ (104.5 GeV) というエネルギーを記録し, その速度を測定した. その結果を Figure 18 に示す. どんなとてつもない手法を用いても, 電子を光速より速く動かすことはできない. (運動エネルギーと速度を別に測定する方法を知っているか.)

Challenge 26 e

Ref. 35

Ref. 36

Challenge 27 e

Figure 18 の速度とエネルギーの関係は最大速度の結果である. その詳細はこれから導く. この結果や他の同様な観測結果は, 物体や輻射の速度には上限があ

Page 63

* '影より速いものは何か.' 日時計によく書かれている文句

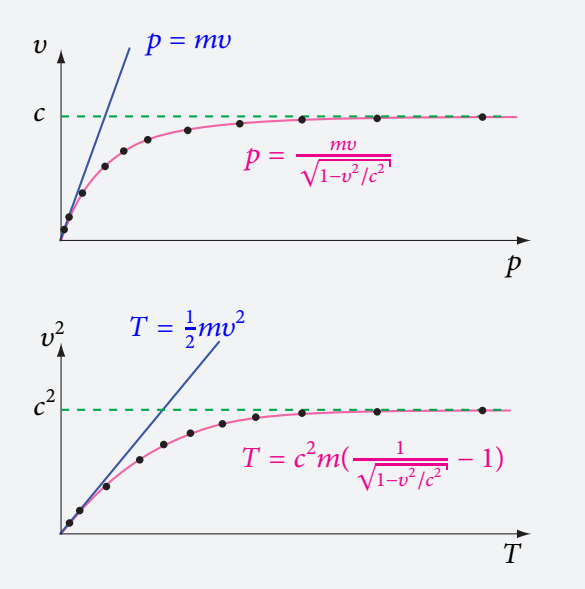


FIGURE 18 電子の速度 v を運動量 p と運動エネルギー T の関数としてプロットした実験値 (黒丸) . ガリレイ物理の予想値 (青) と特殊相対論の 予想値 (赤) もあわせて表示.

ることを示されている. 物体や輻射は光速より速く動くことはできない. * ガリレイ力学は2世紀以上にわたり, 当然なものととして扱われ, それを誰もチェックしてこなかったが, 最終的にチェックしてみると, Figure 18のように, 誤りであることがわかった.

Ref. 39

エネルギーの代わりに運動量を考えても同様の結果になる. 粒子加速器の結果では, 運動量は速度に比例しないし, 高速度では運動量を二乗しても速度の二乗に比例しない. つまり, エネルギーを増加させても, 運動量を増加させても, もっとも軽いどんな粒子であっても, 光速になることはない.

速度に上限があることで一番がっかりするのはコンピュータ技術者である. もし, その速度の上限がもっと大きかったら, もっと高速なマイクロプロセッサーを作ることが可能になり, ひいてはもっと高速なコンピュータが可能になる. すると, たとえば, 言葉を理解したり言葉を使うコンピュータの開発がもっと飛躍的に進歩するだろう.

速度に上限が存在することはガリレイ物理に矛盾する. 実際, 大体15 000 km/s以上の光に近い速度になってくると, 粒子の運動エネルギーは $mv^2/2$ で表せない. このような高速は, 実は, 珍しいことではない. 家庭でもこのような例はよくある. 古いカラーテレビに使われているブラウン管内の電子の速度を, 内部の変圧器が30 kVの電圧を生じているとして, 計算してみてください.

Challenge 28 s

* 依然として, 相対論のみならずこの結果を受け入れることすら拒否している人たちがいる. どの読者も, 一度は, これらの人と会話してみるとおもしろい. (奇妙なことに, これらのグループに属する人の中に女性) がいるとは聞いたことがない. 際立った特徴に違いないが, 物理学に性別がどう影響しているかを調べるのは時間の無駄である.

Ref. 37

Ref. 38 たとえば, インターネットサイトのsci.physics.relativity newsgroup.のように狂信的に主張する人たちもいる. また, www.crank.netも同様であるが, Crackpotsはやや興味がそそられるグループである. 特に, 後者は言葉や動機の正確さの重要性について教えてくれる. 彼らはみんな例外なくそれらを無視している.

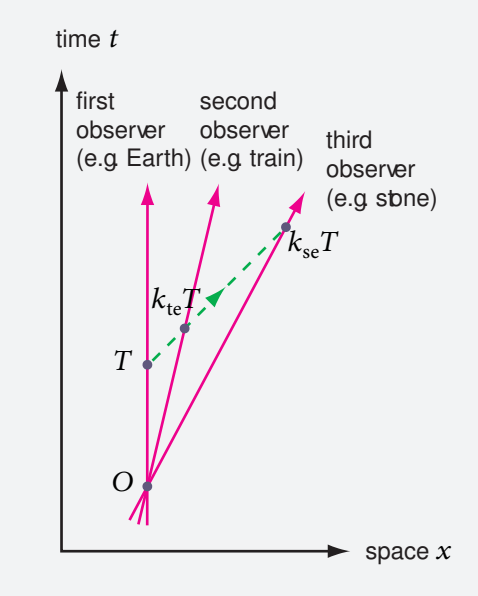


FIGURE 19 速度合成の導出の方法

光速は物体の速度の上限である. この性質は光速不変性の結果であることはすぐわかる. ある座標系で静止することができる物体はその座標系では光よりおそい速度で動くのは明らかである. いま, ある観測者にとって, 何かが別の物よりゆっくりと動いているなら, それは他のどんな観測者にとってもそうである. (そうならない世界を想像してみるのはおもしろい. ものが互いに通り抜けるという奇妙な現象が起きる.) 光の速度はすべての観測者にとって同じであるから, どの観測者にとっても光より速く動ける物体はない.

Challenge 29 d

次のように結論付けられる.

▷ 最大速度は質量のない物の速度である.

光などの電磁波は, 最大の速度で移動できる唯一のものである. 重力波も最大速度をもつだろう予測されているがまだ観測されていない. ニュートリノの速度は実験的に光速と区別できていないが, 最近の実験よればニュートリノは小さな質量を持っていることがわかっている.

Ref. 40

逆に, もし, ある観測者にとって速度が上限速度になるような現象があったなら, この上限速度はすべての観測者にとって必ず同じでなければならない. 上限の性質と観測者不変性の間の関係は一般に自然現象として成り立つのだろうか?

Challenge 30 e
Challenge 31 r

速度の合成

光速が速度の上限とすると, その速度を超えることはどうやってもできない. このことから, 走ったり, 移動しながら石を投げる場合のように, 二つの速度を合成する時は, その値を単純に加えるだけではないことを示している.

地球に対し速度 v_{te} で走っている列車の中で, 乗客が進行方向に列車に対して速度 v_{st} で石を投げるとする. 普通は, 地球に対する石の速度は $v_{se} = v_{st} + v_{te}$ と

考える. ところが, 実際は, 論理的にも測定的にも結果はそうならない.

最大速度の存在とFigure 19を用いると, k 因子は $k_{se} = k_{st}k_{te}$ を満足しなければならない. * この時, 対応する速度を k 因子の関係式 (5) に代入することで,

Challenge 32 e

$$v_{se} = \frac{v_{st} + v_{te}}{1 + v_{st}v_{te}/c^2} \,. \tag{9}$$

が得られる. これを速度合成公式と言う. この結果はcより大きくなることはなく, 2つの速度の単純な和よりいつも小さい. ** 式 (9) は数百万というケースでチェックされ, 検証されている. また, 日常生活であらわれる速度値に対しては, 単純な足し算をしても, 高い精度で成り立っていることがチェックできるだろう.

Challenge 33 e

Page 61

Ref. 16

観測者と特殊相対論の原理

特殊相対論は

▷ エネルギー輸送の最大局所速度はすべての観測者にとって同じである.

という単純な原理をもとに構築されている.

また, ヘンドリック・ローレンツは*** 次の言い回しを好んだ.

Ref. 42

▷ 物理系の速度 v は, すべての観測者に対し,

$$v \leqslant c \tag{10}$$

に制限される. ここでcは光の速度である.

光速不変性は1850年代から知られていた. 電気学の分野で人々に知られていた式 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ が, 観測者や光源の速度にも, その方向や位置にも依存していないからである. 速度非依存性などのcの不変性は, 移動プリズム, 移動する水, 複屈折を起こす移動物体, 異なった方向に進む光ビームの干渉, 回転する光ビームの干渉や運動する星からの光を用いた光学実験で見出された. この不変性は電磁場中で運動する絶縁体を用いた実験でも見出された. **** すべての実験結

Vol. III, page ??

---

* この式の (自然) 対数をとると, ラピディティという量が定義できる. この量は加算側が成り立つ速度量を表す.

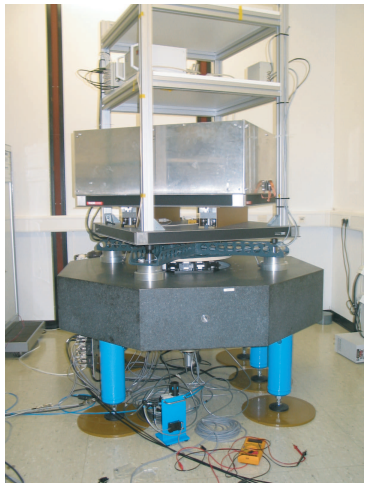
Ref. 41

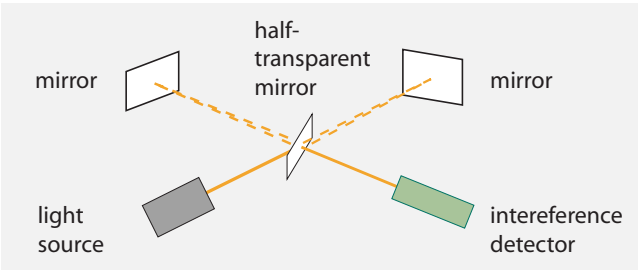
** この式から直接ローレンツ変換を導出することもできる.

*** ヘンドリック・アントン・ローレンツ (Hendrik Antoon Lorentz) (b. 1853 アーンヘム, d. 1928 ハーレム)は, ボルツマンやケルビンと並ぶ, 当時の重要な物理学者の一人. 彼はマックスウェルの電磁場方程式から, いわゆるローレンツ変換やローレンツ収縮を導出した. また, 量子力学の考え方が検証されるだいぶ前から真空に対するマックスウェルの方程式は, 例えば, 電子を運動する点電荷粒子とする限りにおいては, 物質やその性質も記述できると理解していた. 彼は, このことを, 光の分散, ゼーマン効果, ホール効果やファラデー効果に対して示した. また, ローレンツ力も正しく記述した. 1902年, ピーター・ゼーマン (Pieter Zeeman) とともに, ノーベル物理学賞を受賞. 物理学以外では, 活発に科学の協調の国際化を進めた. 彼はまた地球上での人工最大建造物のひとつであるゾイデル海の干拓地の開発にも貢献した.

**** これらの実験は, アインシュタインが1905年に論文ではわざわざ引用することはしなかったものの, 19世紀の物理学者の有力者によってなされたものである. その中には, ウィルヘルム・レントゲン (Wilhelm Röntgen) , アレキサンダー・アイヘンヴァルト (Alexander Eichenwald) , フランソワ・アラゴ (François Arago) , オーガスティン・フレネル (Augustin Fresnel) , ヒポライト・フィ

Ref. 43





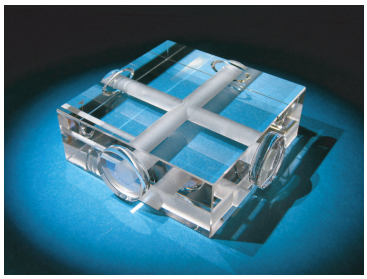


FIGURE 20 観測者の運動に関する光速不変性のテスト. ポツダムにある, 1881年に行われたアルベルト・マイケルソンの最初の実験装置の復元と高精度なレーザーを用いた現代の装置. 現代の装置では鏡間の距離を陽子半径以下の精度で一定にしたまま装置全体を垂直軸の周りを一定に回転できる. (© Astrophysikalisches Institut Potsdam, Stephan Schiller) .

果は, 特殊相対論が定式化される 前でも, 後でも, 必ず, 真空中の光速不変性をしめしているのだ. アルベルト・マイケルソン (Albert Michelson) によってなされた実験, およびシュテファン・シラー (Stephan Schiller) と彼のチームによる現在の高精度の実験をFigure 20に図示する. どんな実験でも, 現在のところ, 地球の運動による光速度の変化は約$2 \cdot 10^{-17}$の実験精度の範囲内で観測されていない. 家庭でも光速不変性の確認できる. これのやり方については電気力学の節で述べる.

Ref. 45

Vol. III, page ??

不変上限速度が存在することによりいくつかの重要な結果が生じる. これを調べるために, ガリレイ物理学の残りの部分についてはそのまま正しいとする.

* 光速には上限があり, 光速は不変であるということは次のことを意味する.

ゾー (Hippolyte Fizeau) , マーチン・フック (Martin Hoek) , ハロルド・ウィルソン (Harold Wilson) , アルベルト・マイケルソン (Albert Michelson) , (ノーベル物理学賞を初めて受賞したアメリカ人, 1907年) エドワード・モーレー (Edward Morley) , オリバー・ロッジ (Oliver Lodge) , ジョン・シュトゥルッツ・レイリー (John Strutt Rayleigh) , ドゥウィット・ブレイス,, ジョージ・サニャック (Georges Sagnac) およびウィレム・ドゥ・シッター (Willem de Sitter) などがあげられる.

Ref. 44

* このことは本質的である. たとえば, ガリレイ物理学では, 観測できるのは相対運動だけであるとしている. また, ガリレイ物理学では, 不変極限速度を実現できても, 数学的に日常生活と矛盾するような方法は採用しない.

Vol. I, page ??

アインシュタインの1905年の原論文では, 光速の不変性とすべての慣性観測者の等価性, つまり, 相対性という2つの原理から出発している. しかし, 後者の原理は1632年にガリレオによりすでに提唱されており, 新しい考えは光の速度のだけであった. それにもかかわらず, この新しい理論

- 閉じた自由に浮いている (慣性) 部屋では, 部屋の速度を測定する方法はない. つまり, ガリレオは, 彼の天文対話の中で述べている: il moto [...] niente opera ed come s' e' non fusse. 「運動は [...]影響をあたえず, それが存在しないかのように振る舞う.」 時には縮めてこう言われれることもある. 「運動は無のようなものだ」
- 絶対静止の概念は存在しない. 静止は観測者に依存する, 相対的概念である. *
- 長さや空間は観測者に依存する. 長さや空間は絶対的ではなく, 相対的である.
- 時間は観測者に依存する. 時間は絶対的ではなく, 相対的である.
- 質量とエネルギーは等価である.

他に2つの条件が満たされると, もっと, 具体的な結論を引き出すことができる. 1つは, 重力が無視できる状況を調べる (この条件が満せない時は, その系を記述するのに一般相対論が必要になる) . 2番目は調べている物体についてのデータ–その速度や位置など– を, 互いに妨げることなく収集できる. (この条件が満せない時には, その系を記述するのに量子論が必要になる) .

二人の観測者により測定される時間や長さは, どの位の量だけ違っているのだろうか. これに答えるには, 鉛筆と物差しが必要になる. まず, 外部の影響のない場合を考えてみよう. つまり, 相対論的動力学:から始める. ただし, すべての物体は他の影響を受けずに運動するとする.

影響を受けていない物体が, 一定速度で直線運動 (または静止) しているのが観測されたとすると, その観測者を慣性観測者といい, その観測者が使用している座標系を慣性座標系という. つまり, 慣性観測者はだれもが外部の影響を受けずに運動している. 慣性観測者 (慣性系) の例としては, 次のようなものがある. 2次元では, 摩擦のない氷面を運動する人や滑らかに走っている船や列車の床の上にいる人などがある. 3次元空間の完全な例としては, エンジンを切って, 宇宙船で旅をする 宇宙飛行士や真空中を落下している人などがある. 3次元の慣性観測者は自由浮遊観測者とも呼ばれる. ここで「自由」とは外部の影響を受けていないという意味である. 従って, 大部分は非慣性観測者で慣性観測者はごくまれである. このことを確認できるか. 一方, 慣性観測者はもっとも単純で, 1つのグループを形成する.

Challenge 35 e

- 任意の二人の慣性観測者は, (上記仮定のように, 重力やその他の相互作用を受けず) それぞれに対し一定の速度で運動する.
- すべての慣性観測者は同等である. 彼らは同じ方程式で世界を記述できる. ガリレオこの表現を, アンリ・ポアンカレ (Henri Poincar) は相対性原理と呼んだ.

一方の慣性観測者からもう一方の慣性観測者へ測定長さと空間距離がどのように変わるかを調べるために, 一方の観測者の空間と時間座標をローマ字で x, y, z と t で, もう一方の観測者の座標をギリシア文字で ξ, υ, ζ と τ で表す. ** こ

は, –ポアンカレにより– 古い原理の印象を与える名前をつけられてしまい, アインシュタインが望んでいた「不変原理」と呼ばれることはなかった.

Ref. 20

Challenge 34 s

* この結論を導く詳細な説明をできるか?

** これらは'xi', 'upsilon', 'zeta' および 'tau'と発音する. すべてのギリシア文字の名称, 対応付け, 発音は第1巻のAppendix ??に記載してある.

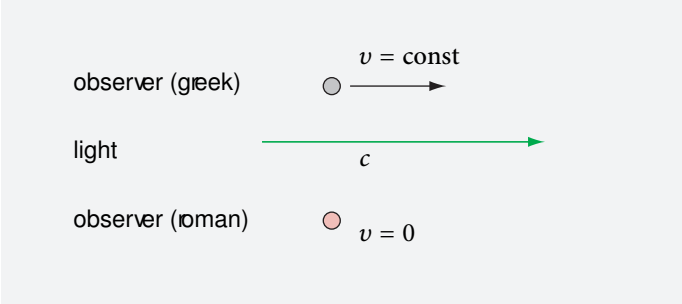


FIGURE 21 二人の慣性観測者と光ビーム. 二人の測定する光速 c は同じ.

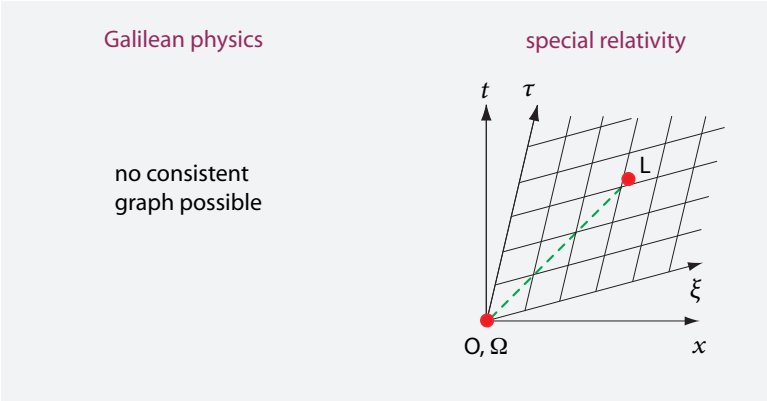


FIGURE 22 二人の慣性観測者から見た光の時空図. それぞれの観測者の座標を (t, x) と (τ, ξ) とする.

れらの慣性観測者は, Figure 21に示すように, 互いに一定速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている. 任意の二人の観測者にとって, どの方向へも光速度は不変であるということは, 二人の観測者が観測する座標間隔は

$$(c\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2 = (c\mathrm{d}\tau)^2 - (\mathrm{d}\xi)^2 - (\mathrm{d}v)^2 - (\mathrm{d}\zeta)^2 \,. \tag{11}$$

Challenge 36 e で関係づけられることを意味する. いま, 速度方向が x と ξ 方向になるように軸をとると,

$$(c\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 = (c\mathrm{d}\tau)^2 - (\mathrm{d}\xi)^2 \,. \tag{12}$$

となる. フラッシュランプがギリシア文字座標の観測者の原点に静止しているとすると, $\xi = 0$ となり, 時間間隔$\mathrm{d}\tau$だけ離れて2つのフラッシュが発せられているとする. ローマ文字座標の観測者にとって, フラッシュランプは速度 v で動
Challenge 37 e くので, $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$ となる. これを前式に代入すると,

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \mathrm{d}\tau \,. \tag{13}$$

となる. この式はある観測者により測定された時間間隔を別の観測者により測定された時間間隔の関係を表す. 日常生活では, 相対速度 v は光速 c と比べて小さいが, そのような状況では, 実際はストレッチ因子, 相対論的因子, ローレ

ンツ因子, または相対論的収縮 γ が1になる. これらの場合, 二人の観測者の 時間間隔は等しくなる. つまり, この時は時間が同じになる. しかし, 速度が光速に近くなると, γ値が増加する. 人類が達成した最大の値は約 $2 \cdot 10^5$ で, 最大の観測値は約 10^{12} である. どこでこれらが起きているかわかるか?

Challenge 38 s

相対論的補正において, γ が1より大きい場合, つまり, 相対速度が0ではない場合, 二人の観測者の時刻測定結果は違った値になる. 時間測定結果は観測者ごとに異なり, 運動している観測者は時間の遅れを観測する.

しかし, 話はこれで終わったわけではない. 時計の動き方がわかれば, 座標がどう変わるかも簡単に導ける. 図 21と 22より, ある事象Lの x 座標は2つの間隔の和である. つまり, ξ 座標と2つの原点間の距離を加えたものである. 言い換えると,

$$\xi = \gamma(x - vt) \,. \tag{14}$$

となる. 時空間隔の不変性を用いると,

$$\tau = \gamma(t - xv/c^2) \,. \tag{15}$$

を得る. アンリ・ポアンカレ (Henri Poincar) はこれらの関係式を, 発見者のオランダ人物理学者ヘンドリック・アントン・ローレンツにちなんで, 空間と時間のローレンツ変換と呼んだ. .* 物理学上最も美しい発見に一つに数えられるこれらの関係式は, 1892年と1904年, ローレンツにより, 電磁気学の方程式から導出された. ローレンツ変換の式は, 1865年以降, 電気力学の式の中にすでに内含されていたのだが, 発見までにこれだけの年月を待たなければならなかった.** この年, ジェームズ・クラーク・マックスウェル (James Clerk Maxwell) は電気, 磁気, 光学のすべてを記述する方程式を発表した. しかし, xとξだけでなく, tとτが時間と空間を同等に成り立たせた記述であることを初めて理解したのはアインシュタインだった.

Vol. III, page 33

ローレンツ変換は, ある慣性系から別の動いている慣性系への視点の変換を記述している. この視点の変換を (ローレンツ) ブーストとよんでいる. ブーストを表現する (14) と (15) は, 特殊相対論と一般相対論の中核をなすものである. 実際, 特殊相対論の数学はこれ以上難しくはならない. 平方根さえわかっていれば, 特殊相対論の美しさは調べることができる.

ローレンツ変換 (14) と (15) は多くのおもしろい結果を含んでいる. これらも, 時間は観測者に依存することを示している. 長さも 観測者に依存する. 実際, 動いている観測者はローレンツ短縮を観測する. このように時空は相対的なのである.

Challenge 39 e

Page 46

ローレンツ変換 (14) と (15) は別の意味で奇妙である. 二人の観測者がお互いを観測していると, それぞれが相手より時間間隔が短いと主張する. 言い換えれば, 塀のそばを自転車に乗り, 草が傾いていたら, 特殊相対論は塀の向こうの草はいつも短いことを示している. この奇妙な結果を, もう少し詳しく調べ

Challenge 40 s

* For information about ヘンドリック・アントン・ローレンツ (Hendrik Antoon Lorentz) については, page 35を参照のこと.

** 同じ発見は1887年, ドイツ人物理学者ボルディマール・フォート (Woldemar Voigt) (b. 1850 ライプチヒ, d. 1919 ゲッチンゲン)によりすでになされていた. フォートはフォート効果やフォートテンソルの発見者でもある. また, 1889年に, ジョージ・フィツジェラルド (George Fitzgerald) (b. 1851 ダブリン, d. 1901 ダブリン)もこの式を発見していた.

Page 46 てみよう.

ローレンツブーストの公式には, 相対速度ばかりでなく, 他に二人の観測者
Ref. 47 が相対的に加速しているようなものなど多く調べられている.. しかし, 他のものはその結果と実験結果を比べてみると, すべて放棄せざるをえなくなる. この実験について述べる前に, ブースト関係から論理的な帰結について続けよう.

時空とは何か

> Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbstsändigkeit bewahren.*
>
> ヘルマン・ミンコフスキー (Hermann Minkowski) .

ローレンツ変換は, 空間と時間は基本的な1つの実体を2つの面から見ているに過ぎないという重要なことを教えてくれる. 観測者が異なるとにとって, 空間と時間の混じり方がちがうのだ. その混じり具合は, 普通, 時間を第4次元目にとることで表現できる. こうすることで, 共通の基本実体, いわゆる時空が, 時間と空間の4つの座標で記述される 事象の集合として定義され, すべての事象の集合体は多様体**の性質を持つため, 話の筋が通るようになる. (このことを
Challenge 41 s 確認できますか?) 時空は観測者に依存せず, 絶対的である. つまり, 時空はブーストによって変化しない. 分れ方が観測者の視点に依存するだけである.

言い換えると, 自然を表現しようとすると, 自然界に最大速度が存在するため, あらゆる事象から作られる不変時空多様体を導入することになる. 重力を考えない特殊相対論では, 時空多様体は1つの単純な性質で特徴づけられる. つ
Ref. 48 まり,

$$\mathrm{d}i^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = c^2\mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) , \tag{16}$$

で定義される2つの事象の時空間隔 $\mathrm{d}i$ は (慣性) 観測者には依存しない, すなわち, 不変である. 時空は, ヘルマン・ミンコフスキー (Hermann Minkowski) *** の名前にちなんで, ミンコフスキー空間とも呼ばれ, アルベルト・アインシュタイン (Albert Einstein) の先生で, 1904年, 最初に, 時空の概念を定義し, その有用性について理解したのは彼だった. 重力がある場合には, 時空全体が曲がることを後に学ぶ. この曲がった時空をリーマン時空と言い, 一般相対論では根本的なものである.

式 (16) の時空間隔 $\mathrm{d}i$ の意味は単純で, 事象 (t, x) から事象 $(t + \mathrm{d}t, x + \mathrm{d}x)$ へ動く観測者の測定する時間, いわゆる, 固有時間を c 倍したものである. 因子 c を無視して, *wristwatch time*と言うこともある.

---

* 「これからは, 空間自身, 時間自身は完全に影に埋もれてしまい, この2つの融合物だけが自治権を維持することになる.」この有名な文言は, 1908年のGesellschaft für Naturforscher und Ärzteの会議でミンコフスキーが行った発表の冒頭の文言である.

** 多様体についてはあとで数学的にきちんと定義する.

*** ヘルマン・ミンコフスキー (b. 1864 アレクソタス, d. 1909 ゲッチンゲン)数学者. アインシュタインと同じアイデアを独立に考え出したが, アインシュタインの方が早かった. ミンコフスキーは, それから, 時空という考え方を展開した. 残念なことに, ミンコフスキーは44歳の時に急逝した.

私たちは時空の中で生きているのだ. 時空は物体とは独立に存在している. 時空は入れ物であり, あらゆる出来事のバックグラウンドである. 従って, 観測者ごとに座標系が異なり, 時間と空間のそれぞれは変化し一意的でなくても, その根底にあるもの, つまり, 時空は同じで一意的な物である. (これはすべて重力が存在する一般相対論にも適用される.)

ミンコフスキー時空は, 日常の時間と空間の組み合わせであるガリレイ時空とどう違うのだろうか. 両方の時空も多様体, つまり, 点の連続集合で, 1つの時間次元と3つの空間次元を持ち, 穴あき球のトポロジーを持つ. (これを確認できるか?) 両方の多様体も平坦, つまり, 曲率はゼロである. いずれの場合も, 空間は物差しまたは光線で測定でき, 時間は時計で読み取れるものである. また, いずれの場合も, 時空は基本的で, 一意的で, 絶対的なものである. つまり, 物や事象の バックグラウンドであり, 入れ物である.

Challenge 42 s

大きな違いは, ただ一つ, ミンコフスキー空間は, ガリレイ空間と違い, 空間と時間を混ぜる. その混ざりぐらいが, Figure 22のように, 観測者の速度によって違うのだ. つまり, その混じりが, 時間と空間が観測者依存, つまり, 相対的になる理由である.

数学的には, 時間は4次元目になり, 空間から時空へと拡張される. 時間を4次元目と呼ぶのは, 単に, 相対論では, どういう計算を行うか–後に述べる– という言い方だけのことであり, 深い意味はない.

自然界に最大速度が存在することにより, 私たちは時空に伴う運動を記述できるのだ. このことは興味深いことで, タブロイド新聞的な言い方をすれば, 時空では運動は存在しない. 運動は空間内でのみ存在する. 時空内では動くものはない. 各点粒子に対し, 空間には1つの世界線が存在する (Figure 23参照) . 言い換えると, なぜ運動は存在するのかを問う代わりに, なぜ, 時空には世界線が縦横に走るのかと問うてもかまわない. しかし, 私たちの探求の旅の現時点では, いずれの問いに答えるのにもまだ遠い.

私たちができるは, どのように運動が起きるのかを探求することである.

過去への旅は可能か. – 時間と因果律

さて, 観測者により, 時間はは異なることがわかった. それでは, 時間に対し, 事象を順序よく並ぶのだろうか. 相対論による答えは, はっきりと, イエスでもありノーでもある. 時間の順に並ぶ事象の集合もあれば, そうでないものもある. Figure 23に示した時空図を見るのが一番よくわかる.

明らかに, 1つの事象が別の事象の原因である場合, または, 原因になり得る場合においてのみ, 2つの事象は時間順に並べることができる. しかし, この原因と結果の関連は, 第1番目の事象が, 信号か何かを使って, エネルギーを第2の事象に送れる場合にのみ成り立つ. 言い換えると, 2つの事象間の時間的順序としては, それら事象をつなぐ信号の速度が光速を超えてはならないことを意味している. Figure 23において, 原点事象Eは領域IV (すべての空間次元を含む過去光円錐) にある事象からの影響を受けることができ, 領域II (すべての空間次元を含む未来光円錐) にある事象へ影響を与えることができる. 領域Iと領域IIIの事象は原点事象Eに対し影響を与えることも, 影響を受けることもできない. つまり, これを実現しようとすると, 光速より速い信号が必要になる. このように, 光円錐全体は, 事象Eに対し, すべての観測者にとってどこかで起きている事象を, 順序付けることができる事象 (円錐内部の事象) とできない事象

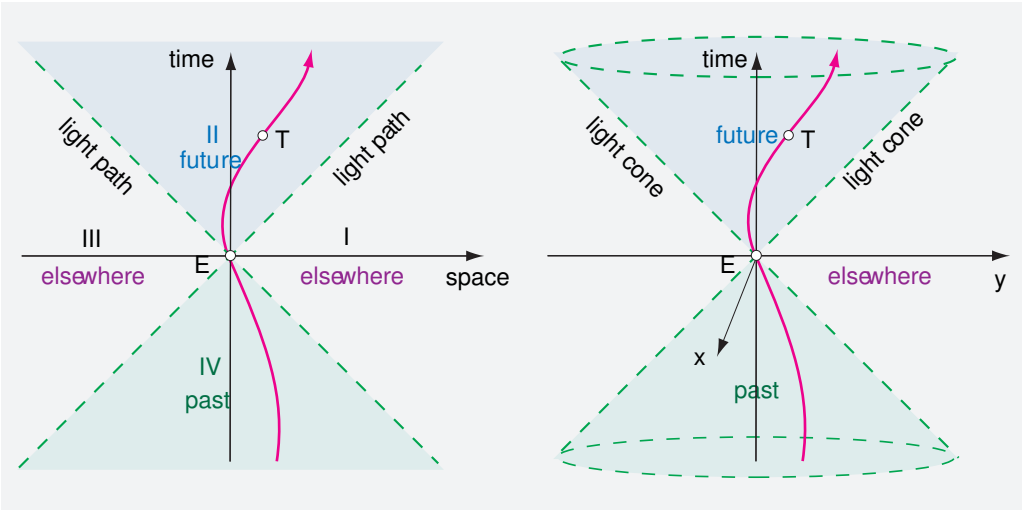


FIGURE 23 慣性観測者Oから見た移動物体Tの, 空間が1次元と2次元の場合の時空図. ある点の世界線の傾きがその点での速度を表す. 従って, 光の傾きより急にはならない.

(円錐外部の事象) に分ける境界となる. (どこかで起きている事象は存在していると言う人もいる.

過去光円錐は, 座標原点であるEで起きることに影響を与えることができる. これを, Eは過去光円錐の事象と因果的に結合していると言うこともある. 因果的な結合 はは不変的なものである. つまり, 因果的に2つの事象が結合しているかどうかについてはすべての観測者が同意する. このことを確認できるか?

Challenge 43 s

要するに, 一部のの事象については, 時間的に並べることができる. 特に, 因果的に結合していない2つの事象に対しては, 時間順序 (またはその同時性) は観測者 に依存する.

Challenge 44 e

光円錐内部のベクトルを時間的という. 光円錐上のベクトルを光的またはヌル, 円錐の外側のベクトルを空間的という. たとえば, 観測者の世界線, つまり, 観測者の過去と未来を形作っている事象の集合はすべて時間的事象のみで構成されている. 因果性と時間は, ただ, 光円錐が存在するので, 定義できることを, 特殊相対論は教えてくれる. もし, 光速より速い速度のエネルギー輸送速度が存在するなら, 時間は定義できないだろう. 因果律, つまり, すべての観測者に対し (部分的に) 事象を時間の順に並べることができるのは, 最大速度が存在するからである. もし光速を超えることができたら, いつも, 宝くじを当てることができるだろう. なぜかわかるか. 言い換えると, どうにかして, 光速を超えることができたら, 未来が過去に影響を与えることができるだろう. これを確認できるか? こういう状況になると, 非因果的な効果を見ることができるだろう. しかし, 実際, 光速が最大速度であるという日常現象がある. 私たちの記憶である. もし, 未来が過去に影響を与えることが可能だとしたら, 未来を思い出すことができるだろう. 別の言い方では, もし, 未来が過去に影響を与えることが可能だとしたら, 熱力学第2法則が成り立たなくなってしまうだろう. * 日常生活や実験において, 未来が過去に影響を与える証拠はどこにもない. つまり,

Challenge 45 e

Challenge 46 s

* これに関連して, だんだん常識にになりつつあることがある. 時空が, 閉じた時間的曲線を持つ円筒トポロジーのような複雑な形をしていても, SF小説のようにはならず, 過去への旅行は不可能である. これは, スティーブン・ブラウ (Steven Blau) による, 最近の教育的な論文のなかで明らかにされている.

Ref. 49

▷ 過去への時間旅行は不可能である.

量子力学ではこの状況がどう変わるかは後に述べたい. おもしろいことに, 未来への時間旅行は可能である. そのことについては後で簡単に述べる.

特殊相対論の楽しみ

特殊相対論には面白い効果が満載である. 私たちの思考力を鋭くしてくれる謎から始めよう. ある島で観測者が2つの稲妻を同時に目撃した. 1つは島に落ち, もう1つは数キロ離れた海の上に落ちた. 第2の観測者は相対論的な飛行機の中にいるパイロットで, 稲妻が島に落ちた時, たまたま, その島の真上にいた. パイロットにとってどちらの稲妻が先に落ちたか.

Challenge 47 e

パイロットにとっての遠方の稲妻, つまり, 海に落ちた稲妻の方が先に落ちている. しかし, これは, よく考えないといけない. この稲妻は先なのだが, パイロットは, 遠方に落ちた稲妻は, 島に落ちたものより後に落ちたと観測している. なぜなら, 遠方からの光は, パイロットに届くまでに時間がかかっているからである. しかし, パイロットは伝播時間を補正し, 遠方の稲妻の方が先に落ちたと導いている.

Challenge 48 e

鏡の前で手を振ったところ, その像は同じ周波数で動いている. 鏡を相対論的速度で遠ざけるとどうなるか.

Challenge 49 e

金の黄色は相対論的効果だと量子力学の節で述べる. また, 常温での水銀の液体状態も相対論の結果である. いずれの効果も, これらの原子の外殻電子が高速で動いていることによる.

Vol. IV, page ??

さらに, 特殊相対論の結果について探求してみよう.

光より速く：どの位遠くまで旅することができるか

一生の間, たとえば80年間, 旅を続けることが可能で, しかも, 好きなだけ光速に近い速度で旅ができるとしたら, 地球からどの位遠くまで旅ができるのだろうか. ロケットの中で滞在できる時間 t, ロケットの速度を v, 加速と原則に要する時間を無視してもいいとすると, 離れることのできる距離は

Challenge 50 e

$$d = \frac{vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{17}$$

となる. $v > 0.72c$になると, その距離 d は ct より大きくなり, v がさらに増加すると, すべての境界を越えてしまう. 言い換えると, 私たちが一生の間, いや, 任意の時間に旅するできる距離は光速より制限され ない. 原理的には1秒以内に全宇宙を旅することも可能なのだ. (全体の話は以下で議論する.

Page 46

ロケットの旅に対し,

$$w = \frac{d}{t} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\, v \,. \tag{18}$$

で定義される固有速度 w, の概念を導入すると, 意味が理解できる. いままで, 見てきたように, 固有速度は光速により制限されない. 実際, 光の固有速度は無

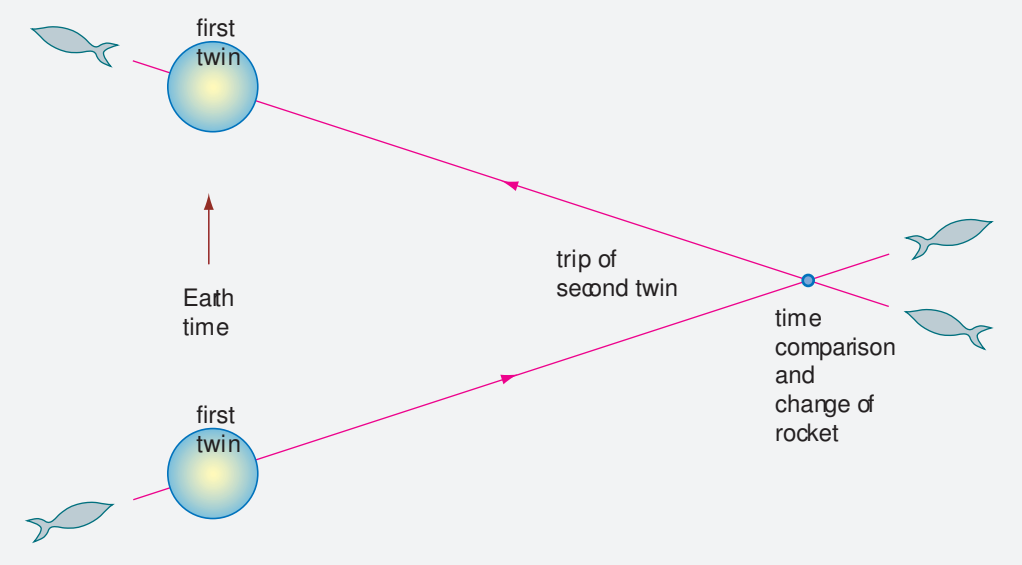


FIGURE 24 双子のパラドクス

限大である. *

同時刻化と時間旅行 – 母親は自分の娘より若くなることができるか

自然界に最大速度が存在するということは, 互いに運動する別の観測者の時間は異なることを意味する. そのため, 遠く離れた時計の時刻合わせを行う時は, たとえ, それらの時計が 1 つの慣性系にあって互いに静止しているとしても, 注意を払う必要がある. たとえば, 同じ時間を示している2つの同じ時計を持っていて, そのひとつを持って歩き始め戻ってくると, 時計は違う時間を示している. この実験は何度も行われ, 特殊相対論の予想する結果になることが確認されている. 地球の周りを約900 km/hの速度で移動している飛行機内の人または時計の時間差は, 通常生活では感知できない程度ではあるが, 100 nsオーダーになる. これは時計のパラドクスと呼ばれることもある. 実際, この時間の遅れは次式から簡単に計算できる.

Ref. 51, Ref. 52

$$\frac{t}{t'} = \gamma \,. \tag{20}$$

人体も時計である. 年齢という時間を経過すると, 体形, 体重, 髪の色などが変化する. ある人が高速で長い旅をして戻ってくると, 家に居た人よりも加齢が少なく, 若い. 要するに, cの不変性は旅行者は若く保てることを意味する.

これのもっとも極端な例が, 有名な双子のパラドクスである. 冒険好きな双子の一人が相対論的なロケットに飛び乗り地球を離れ何年も旅をする. 地球から遠く離れた所で, 別の相対論的なロケットに乗り換えて, 地球に戻ってくる. この旅行をFigure 24に図示する. 到着すると, 地球にいた双子の兄が自分より

* 固有速度を用いると, 2つの速度 $\mathbf{w}_a = \gamma_a \mathbf{v}_a$ と $\mathbf{w}_b = \gamma_b \mathbf{v}_b$ の合成についての関係式 (9) は, 簡単にでき,

Challenge 51 e

$$w_{s\parallel} = \gamma_a \gamma_b (v_a + v_{b\parallel}) \quad \text{and} \quad w_{s\perp} = w_{b\perp} \,, \tag{19}$$

となる. ここで, 記号 $\parallel$ と $\perp$ は, それぞれ, $\mathbf{v}_a$ に平行な成分と垂直な成分である. 実際, すべての特殊相対論は「固有」量で表現することが可能である.

Ref. 50

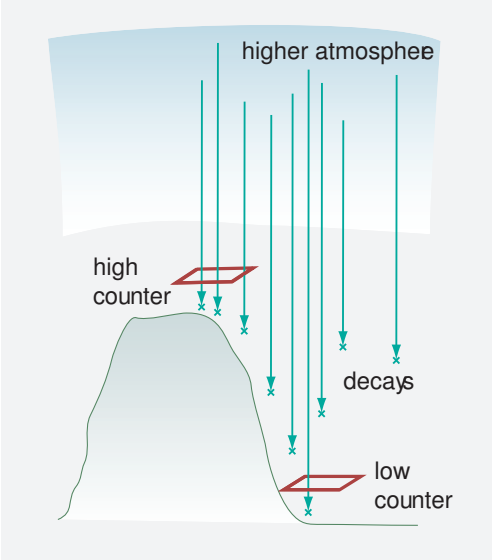


FIGURE 25 高速移動は若く保てるという理由で, 予想以上に多くのミューオンが地上に到達する.

ひどく老いていることに気付く. この結果は, 双子によるものではないが, 多くの実験で確認されている. この結果を, 特に, 双子の2人の非対称性を説明できるか? 特殊相対論は, このように, たくさん旅する人は若く保てるというよく知られている意見を驚くべき形で示した. 他方, これまで測定された中で最長のこの若さ保持効果を享受したのは宇宙飛行士 セルゲイ・クリカレフ (Sergei Krikalyov) で, 103日間, 宇宙の軌道上で過ごしたが, 地球上の人と比べて数ミリ秒だけ加齢が少なかっただけである.

Ref. 53

Challenge 52 s

双子のパラドクスは, 未来への時間旅行の可能性の確認でもある. 高速ロケットの助けを借りて, 出発点に戻ってくると, そこに住んでいたら, 自分の寿命では到底たどり着けない未来に到着することができる. 悲しいかな, 過去に戻ってそのことについて語ることは, 絶対にでき ない. *

高速旅行者の若さが延びることを確認できる実験がミューオンの計数測定だ. ミューオンは上方大気中で宇宙線から絶えず作られている粒子で, 地上に降ってきている. (測定用時計に対し) 静止しているミューオンは有限の半減期2.2 µsを持っている (光速で 660 m) . この時間が経つと, ミューオンの半分は崩壊してしまう. この半減期は単純なミューオン計数管を使って測定することができる. さらに, もっと特殊な計数管があり, ある速度範囲, たとえば, 0.9950c から 0.9954c までの速度で運動するミューオンのみを計数することができる. Figure 25に示すように, これらの計数管の1つを山の頂上に, もう1つを谷底に置く. この実験が初めて行われた時, その高度差は1.9 kmだった. 大気中を上記の速度で1.9 km飛ぶのに必要な時間は約 6.4 µsである. 先ほどの半減期の値であれば, 山頂で観測されたミューオンの約13 %だけが谷の底に到着するはずなのだが, 観測によるとミューオンの約82 %が下に届いている.

Vol. V, page ??

Ref. 55

Challenge 53 s

Ref. 54

* ナーイン (Nahin) による十分検討されたような時間旅行の本もある. ただし, 時間旅行の概念については明確に定義されなければいけない. そうでないと, 座っていると未来にたどりつけるからということで, 自分の事務所椅子をタイムマシンと呼ぶ事務員に反論することすらできなくなる.

この理由は相対論的な時間の遅れである. 実際, 上記の速度では, ミューオンが山の頂上から谷間で間に経験する固有時間はほんの0.62 μsある. この時間は人間の観測者により, 観測される時間より短い. 短くなったミューオン時間のため, 失われるミューオンの数は, 時間遅れがない場合よりも少なくなる. さらに, , 測定されるパーセントは, 実験誤差の範囲内で予想される時間因子 γ と一致している. 確認してみてください. いわゆる, ストーレージリングの内部で高速で回転している相対論的ミューオンでもこの効果は確認されている. 速く回れば回るほど, 寿命は長くなる.

Challenge 54 s

Ref. 56

半減期の遅れは, パイオンや水素原子, ネオン原子やその他の原子核など他の多くの崩壊系でも見つかってきたが, いつも, 特殊相対論」の予想と一致している. この効果は特別のことではなく, 高速粒子では, それを見かけの半減期τ_{app}と言い, $\tau_{app} = \gamma\tau$の関係で表される. 自然界のすべての物体は粒子から出来ているので, 通常, 時間の遅れと呼んでいる高速の「若さ持続効果」はすべてのサイズの物体に対し成り立つ. 実際, 粒子ばかりではなく, レーザーや無線送信器, 時計でも観測されている.

Ref. 16

もし, 運動が時間の遅れをもたらすとするなら, 赤道上の時計は, 常に, 地球とともに動いているので, 極にある時計よりもゆっくり時を刻むはずである. しかし, アインシュタイン自身によりなされたこの予測は誤っている. 遠心力が重力加速度を弱め, その時間の遅れは回転速度によるものをちょうどキャンセルする. この話は, 重力を含む場合に特殊相対論を適用する時, 思い出して, 注意しなければならない. 純粋の特殊相対論は, 時空が平坦, つまり, 重力がない時にのみ適用できる.

Ref. 57

まとめると, 母親は自分の娘より若くとどまれることができる. しかし, 娘より若くとどまりたいという母親の願いを実現するのは容易ではない. 想像してみてください. 母親が宇宙船に乗り, 10年間, 10 m/s^{2}で加速され地球を離れ, それから, もう10年, 10 m/s^{2}で減速し, それから, さらに, 10年間, 今度は, 地球に向かい加速し, 最後に, 私たちの惑星に無事着陸できるように, 10年間減速する. 母親のこの旅は40年かかる. 彼女は 22 000 光年の所まで行き, 戻ってきたら, 地球では 44 000 年経っている. 想像できる効率的なエンジンがあったとして, それの燃料がばかにならず, この旅から戻ってこれる質量は, 出発時の質量の$2 \cdot 10^{19}$の1だけであることがわかると, うまく行きそうな気がしない. この量の燃料は地球上には存在しない. もっと短い旅行でも同じような問題が生じる.

Challenge 55 e

Ref. 58

手に時計をもって移動し, 互いに静止している2つの時計の単純な時刻合わせをすることも不可能である. それ行うをための正しい方法は光信号を交換することである. どうやってそれを行うか説明できるか? 時刻合わせの正確な定義が必要である. なぜなら, 座標を定義する際になどに, 2つの事象が同時であるということを使う. 明らかに, 最大速度が存在すると, 同時性は観測者に依存する. 実際, この依存性はすべての実験で確認されてきている.

Challenge 56 s

長さの短縮

ある物体に張り付いている観測者が観測するその物体の長さを固有長という. その傍を通り過ぎる観測者が測定する長さは固有長よりいつも短くなる. この結果は, ローレンツ変換に, 直接, 従う.

Challenge 57 e

300 km/h,つまり, 83 m/sで走るフェラーリの長さは0.15 pmだけ短くなる. こ

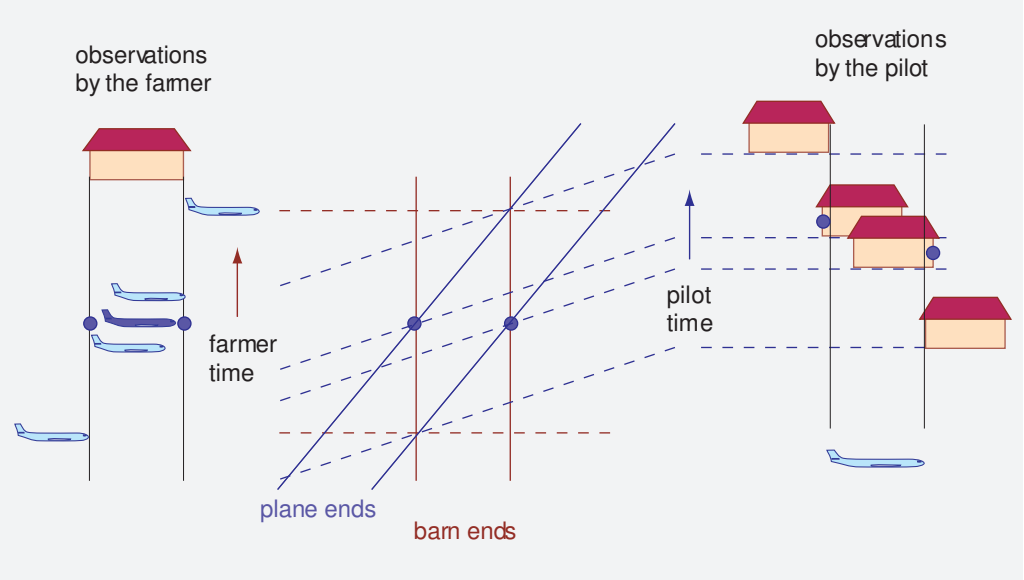


FIGURE 26 パイロットと納屋の所有者による観測

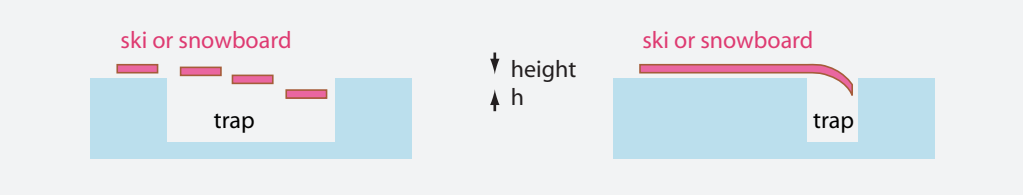


FIGURE 27 (誤解をまねきやすい) よく書物で見かける落とし穴を掘った人の観測 (左) とスノーボーダーの観測 (右)

の長さは陽子の直径より小さい. 太陽から見た時, 地球は30 km/sで動いており, この時, 長さは6 cmだけ短くなる. この二つの効果はまだ測定されていない. * しかし, もっと大きな効果なら測定できるだろう. この結論を調べてみよう.

両端に扉のある納屋を通過する飛行機のパイロットを考えてみよう. 飛行機は納屋より少しだけ長いが, 非常に高速で飛行しているため, 相対論的に短縮し, 納屋の長さより短くなっている. 農夫は, (少なくとも短時間) , 飛行機を完全に納屋に閉じ込めることはできるか. 答えはイエスだ. しかし, パイロットは, 納屋は短縮しており, 従って, 飛行機は納屋の内部に収まらないと, なぜ, 言えないのだろうか. 答えをFigure 26に示す. 農夫にとって, 納屋のドアを同時に閉め (再び開く) ても, パイロットにとっては同時ではない. 農夫から見れば, パイロットは短時間暗闇の中にいるが, パイロットにとっては納屋は暗闇でない (これは完全には正しくない. 詳細を説明できるか?)

Challenge 59 s

一般的な場合のいくつかの変形を調べてみよう. 素早い動きのスノーボーダーは自分のスノーボードよりやや小さい穴に落ちるだろうか. 彼は (あり得ないほどの高速) で滑っていて, 短縮因子γ が4であるとする. 地面の上で見ている人にとってはスノーボードが4倍短くなり, 穴の上を越える際に, 穴に落ちるだろう. しかし, スノーボーダーにとっては, 穴が4倍縮み, スノーボードは穴に落ちないように見える.

Challenge 58 s

* 地球の短縮値は測定可能か?

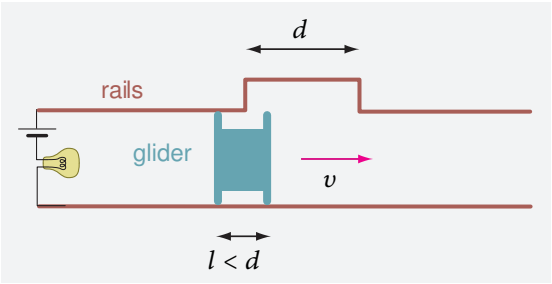


FIGURE 28 高速で動く導電滑走体はランプを点灯させ続けられるか

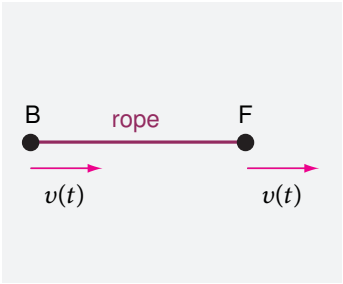


FIGURE 29 ロープはどうなるか

Ref. 59 まず, 注意深く考えてみると, 穴を掘った人の観測に反して, スノーボーダーにとっては, 変形したボードを経験する. 穴の上を通過しながら, スノーボーダーは, Figure 27に示すように, 放物形状になり, 穴に落ちてゆくのを観測する. Challenge 60 e これを確かめられるか. 言い換えると, 形は観測者不変の概念ではない. (しかしながら, 正しく定義するなら, 剛性は観測者不変である. これを確かめられるか?) Challenge 61 s

しかし, この図や説明は出版されているが, ハラルド・ヴァン・リンテル (Harald van Lintel) やクリスチャン・グルーバー (Christian Gruber) が指摘しているように正しくない. 効果のサイズの算出を忘れてはいけない. 相対論的速度では, 穴がボードの厚さに影響を与える時間は無視できない. スノーボーダーが放物線状のボードに乗っているように見えるのは, ボードが極端に薄く, 曲がりやすい場合においてのみである. 普通のボードが相対論的速度で動いている場合には, スノーボードが通過する前に, 感知できるほどの高さhを落下したり, 穴に入り込むほど曲がるだけの時間はない. Figure 27は強調しすぎで, 正しくはない. スノーボードは単に穴を通過するだろう. Ref. 60 Challenge 62 e

実は, この議論は, 無重力状態で, 棒が傾斜経路上を細長い穴に向かって動く時, 何が起きかを調べることに単純化できる. さまざまなケースがあるが, 細長い穴と棒が,棒とともに動く観測者にとって平行な場合には, 穴の系の観測者にとっては平行ではない. 逆の場合も同じである. つまり, 平行性の概念も相対的である. Ref. 61

長さの短縮でもっとおもしろいパラドクスは, Figure 28に示すような, 2本のレール間で電気的接触をとっている導電滑走体のケースである. 2本のレールは平行だが, 片方のレールには滑走体より長い間隙の部分がある. 滑走体が相対論的速度でレールに沿って動いている時, 直列に接続されたランプは灯り続けることはできるのだろうか? (完全に現実的とはいえないが, 滑走体はレールに接触したらすぐに, また接触しているちょうどその時間, 電流は流れるといしてください.) すべての観測者で同じ結果が得られるか. また, 滑走体が迂回部分より長くなったらどうなるか. (警告：この問題は白熱した議論を起こすだろう.) この実験で非現実的なところは何だろう. Ref. 62 Challenge 63 s

長さの短縮の別の例は, 2つの物体, 例えば2台の自動車が, Figure 29のように, 真直ぐなロープで, 距離 d だけ離れてつながれている. 時刻 $t = 0$ で両者は静止していて, それから, 2台の車はまったく同じように加速する. その時, 静止している観測者は, 2台の自動車はいつも同じ距離だけ離れていると主張する. 一方, 2台の車が加速してゆくと, ロープの差し渡しは $d' = d/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ と, 広がるにちがいない. つまり, ロープは切れる. この予測はすべての観測者, つまり,

FIGURE 30 Daniel Weiskopfにより可視化された光速の0.9倍の速度で飛行した時に見える真直ぐで垂直の柱. 左：元の色, 中央：ドップラー効果を含む, 右： 明るさの効果も含む. 観測者にとって実際どう見えるかを示す (© Daniel Weiskopf) .

車の観測者と地上の観測者の両者で確認できることを, 各自, チェックしてください.

Challenge 64 s

長さの短縮の例として, ちょっと非現実的だが, おもしろいのが水平方向に動く潜水艦の例である. 動く前, , 静止状態の潜水艦は, 浮きも沈みもせず, 水中で静止するように調整されている. さて, 次に, 潜水艦は (相対論的速度で) 水平方向に動いている. 艦長は外部の水がローレンツ短縮されていることを観測する. つまり, 水の密度が高まり, 潜水艦は浮上してゆくだろう. 付近の魚は, 潜水艦が短縮し, 水よりも密度が大きくなり, 潜水艦は沈むだろう結論付ける. どちらが, 間違っていて, いったい, 浮力は何なのだろうか? また, 次の疑問に答えよ：なぜ, 潜水艦は相対論的速度で動けないか?

Ref. 64

Challenge 65 s

Challenge 66 s

まとめると, 巨視的な物体にとって, 長さの短縮は多分観測できない. しかし, 像に対しては重要な役割を果たす. *images*.

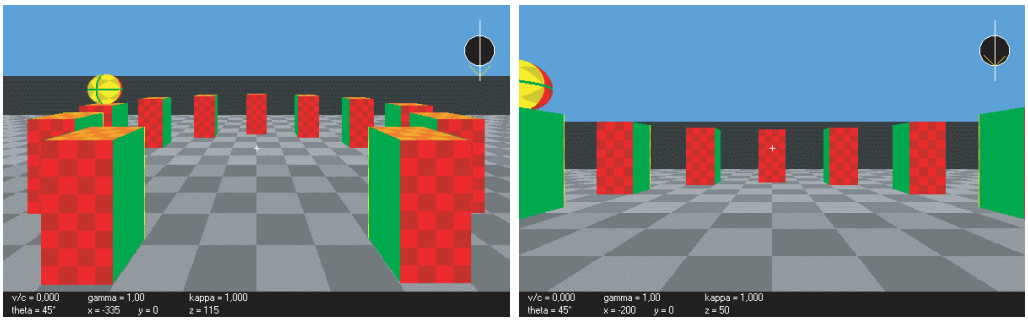
相対論的動画 – 収差とドップラー効果

これまでの,冒険で, 相対論的速度で動く時に観測される周辺がどう変化するかについて見てきた. ここで, これらを統合してみよう. まず, ローレンツ短縮と収差が像をゆがめる. 第2に, 収差が, 日常生活で見慣れているほぼ180度という視野角を, それ以上に拡げてしまう. 相対論的速度で運動方向を見ると, 静止している観測者では背後にあるため見えなかった光が見えるようになる. 第3にドップラー効果のため像に色のシフトが生じる. 第4に, 高速運動のため像の明るさとコントラストが変わる. いわゆる, サーチライト効果である. これらの効果はおのおの, Figure 30に示すように見ている方向に依存する.

現代のコンピュータを用いると, 高速観測者の観測を写真品質でシミュレートすることができる. そして, 動画シミュレーションやコンピュータゲームさえ作り出せる. * 特に, Figure 31は像のひずみを理解するのに有用である. この図には視野角, 観測者の前の物体と後ろの物体を区別するための円, 観測者の座標や観測者が向かっている水平線上の点が示されている. その他の像や動画

* 多くのすばらしい像や動画の例については, Anthony Searleによるwww.anu.edu.au/Physics/Searle やCraig Savageと彼のチームによるwww.anu.edu.au/Physics/vrprojectを参照してください. realtimerelativity.orgからフリーのダウンロードプログラムを扱うことで, インタラクティブな運動の体験も可能です. Daniel Weiskopfによるwww.tat.physik.uni-tuebingen.de/~weiskopf/gallery/index.html, Norbert DragonとNicolai Mokrosによるwww.itp.uni-hannover.de/~dragon/stonehenge/stone1.htm, また, かつてHanns Ruderのグループにいた Ute Krausによるwww.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.deにも美しい素材があります.

Views for an observer at rest



Views for an observer at relativistic speed

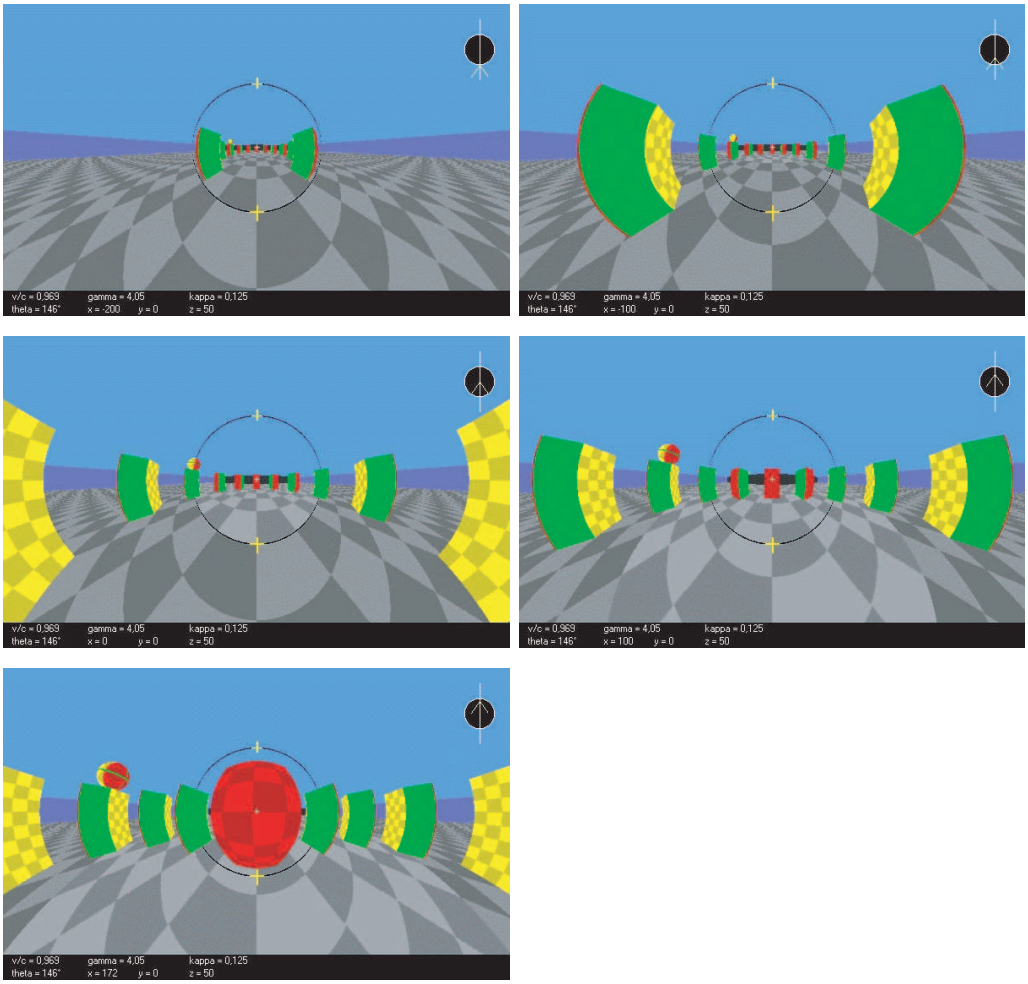


FIGURE 31 Nicolai MokrosとNorbert Dragonにより可視化された光速の0.9倍の速度で飛行したときに見える12本の垂直柱 (一番上の2つの図ですべて見える) . 速度と位置のひずみの効果を示す (© Nicolai Mokros) .

FIGURE 32 立っている研究者が見るものと廊下を高速で走っている研究者が見るもの (色と明るさへの影響は無視している) (© Daniel Weiskopf)

を見るときも, これらのマーカーを頭に入れておくと, 自分の見ているものがよりはっきりするだろう.

動いている観測者がみる像は, 同じ点に静止している人が見る像を歪ませたものである. Figure 32がこのことをはっきりと示している. しかし, 動いている観測者は, 静止している観測者と別の物を見ているのではない. 実際, 光円錐は観測者の運動とは無関係である.

像を注意深く見ていると別の効果が見えてくる. たとえ, ローレンツ収縮が測定できても, それを写真に撮影することはできない. この驚くべき発見は1959年になされた. 測定をするというのは物体の位置で同時性を意味するのに対し, 写真撮影は観測者の位置での同時性を意味している. 写真やフィルムでは, 物体の異なった部分からの光の到達時間が異なるため, ローレンツ効果が違ってくる. その結果, 回転そのものではないが, それを想起させるような変化が生じる. これをFigure 33に示す. 全体の変形は角度に依存する収差である.

Ref. 65

Page 15

この章の最初に星の位置の収差である光行差について議論した. 完全な像では, 収差は円を円に変換する. このような変換を等角と呼ぶ. 結果的に, 相対論的速度にあっては, 厚みは変わるが, 球は円形の外縁を持つようになる.

収差はパールネックレスパラドクスを生じる. 相対論的運動により, 環状に並んだ球では影響を受けず, 棒状の物だけが短く変わるとしたら, 長軸に沿って動く パールのネックレスでは何が起きるか. 短くなるか, それとも変わらないか?

Challenge 67 s

他のパズルとしては, 高速で移動と回転をする 1 つの球を考えてください. これらの上述の効果のみで, 観測者により異なる回転についてを説明できる

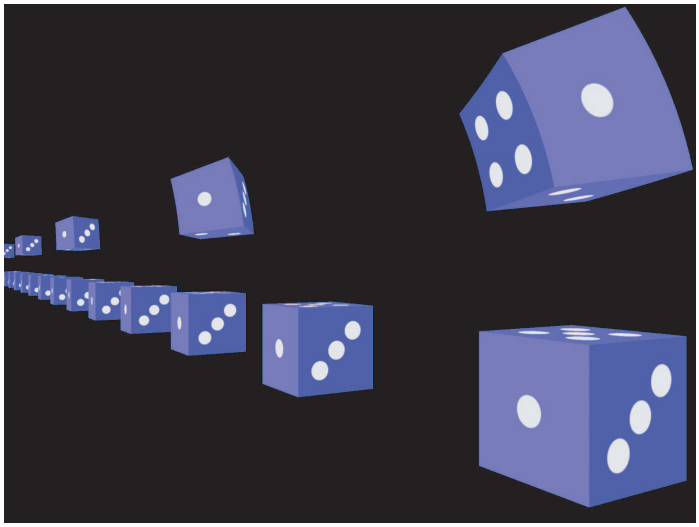


FIGURE 33 静止したサイコロの並び (下) と, その上を相対論的速度で読者の方に向かって飛んでくる同じサイコロの列. ただし, ドップラー効果や明るさの効果は無視してある. (Mpg film © Ute Kraus atwww.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de)

Challenge 68 r か?

バスのどの席が最良か

Ref. 63 もう 1 つ, 特殊相対論の驚きの例を調べてみよう. 双子がそれぞれ同じように加速する車の中にいて, 一人は前の車, もう一人は後ろの車に乗車, 二人に対し静止している観測者によると, 2台のバスは時刻 $t = 0$ に静止状態から動き始めた. (今度は2台の車をつなぐロープはない.) 2 台は同じ量の燃料を搭載している. 燃料がなくなると, 外部の観測者の系では, 2台の車は同時に停止することは簡単にわかる. また, もし, 摩擦が無視できるなら, 外部の観測者にとって, 2 台の車間距離は同じで, 一定の同じ速度 v で走り続ける. 前の車と後ろの車がエンジンのスイッチをオフにする事象を fとb とすると, 静止している外部座標の時間の関係は単純に $t_f = t_b$ である. ローレンツ変換を用いると, 自由運動
Challenge 69 e をしている双子の座標での関係が求まり,

$$t'_b = \gamma \Delta x \, v/c^2 + t'_f \,, \tag{21}$$

となる. この式によると, 前の車に乗っている双子の一人の方が, 後ろの車に乗っているもう一人の方より年をとっている. このように, 加速系では, 加齢速度が位置に依存する.

しかし, バスの席取りでは, この結果は役に立たない. 実は, 加速の時は, 後ろの席の方が良いが, 減速の際は前の方がいい. 旅の終わりには, 席の選択は問題にはならない.

上記のことから, 高山にいる人の方が谷間の人より速く年を取り, 従って, 谷
Challenge 70 s 間で生活する方が白髪になるのが後になると導くのは正しいか?

どの位速く歩けるか

走ることに対し ,「歩く」とは少なくとも片方の足が必ず着地して動くことを

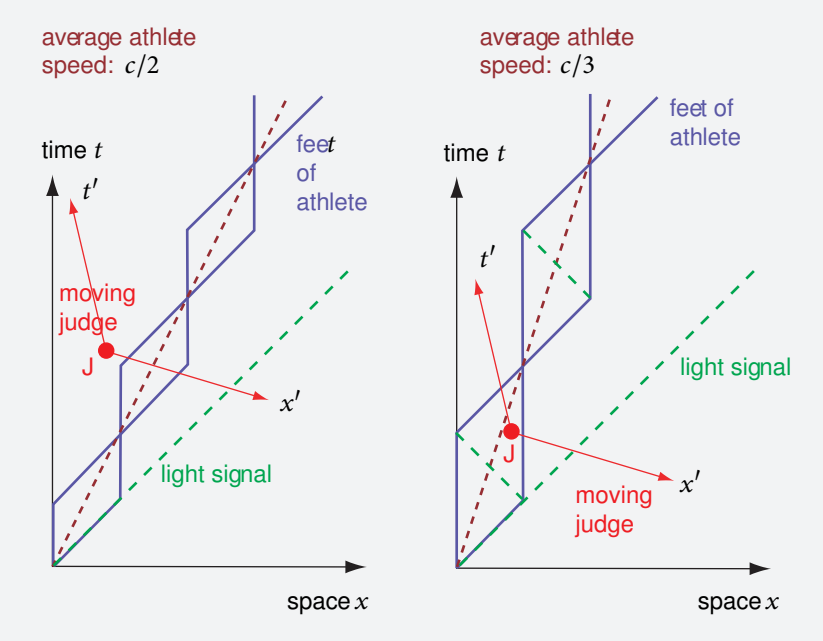


FIGURE 34 左側の選手に対し, 反対方向に動く競技審判は, 両方の足が一定時間着地していると見るが, 右側の選手に対してはそうではない.

意味する. これはオリンピックの競歩競技では守らなければいけない規則である. もしそれを破ると失格になる. ある学生選手が, オリンピックで達成できる理論的最高速度を考えたことがあった. それぞれの足の動かす速度を瞬時に (ほぼ) 光速にするのが理想であろう. 最高の歩速は, 一方の足が地面に触れるとほぼ同時に, もう一方の足を地面から離すことで達成できる. その学生は,「同時」とは地面に静止している競技審判が確認することを前提にしていた. 足の運動をFigure 34に示す. これによると, 競歩の極限の速度とは光速の 半分である.

しかし, この時, 学生は気が付いた. 動いている審判は, 両方の足がいつも地面から離れているを目撃し, 選手は走っているという理由で失格になるだろう.

Ref. 66 どの審判にも, 失格を宣言させないようにするには, 上げる方の足は, 下げる方の足からの光信号の到着を待たないといけない. そのため, オリンピックの競歩の極限の速度は光速のたった3分の一になってしまった.

影の速度は光速より大きいか

光より速い運動は存在し, しかも, よくあることなのだ. 自然が制限するのは質量やエネルギーの運動だけである. しかし, 物質を構成しないもの, エネルギーを運ばないもの, 像は光より速く動くことができる. 簡単な例がいくつかある.

Page 43 はっきりさせるため, 固有速度については触れないことにする. この例ではき

Challenge 71 s ちんと定義できないからだ. (なぜか?) 以下の例は, 真空中における, 光速より速い速度の例である.

最初の例は, Figure 35に示すはさみによる紙の切断点Xである. はさみを十分な速さで押すと, 切断点は光速より速く動く. 同じ様な機構が窓枠にもある. 他に, どんな器具にもねじれの箇所がある.

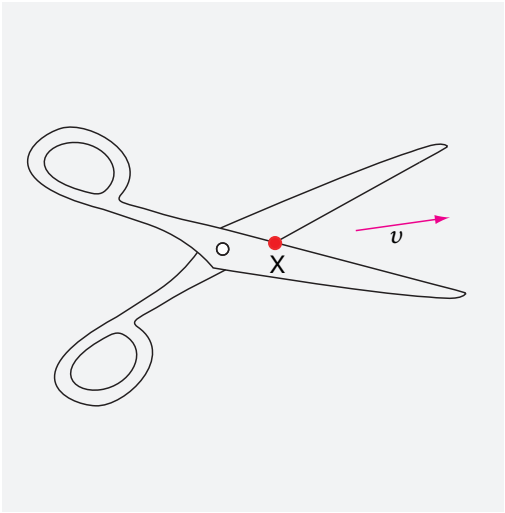


FIGURE 35 光りより速い単純な例

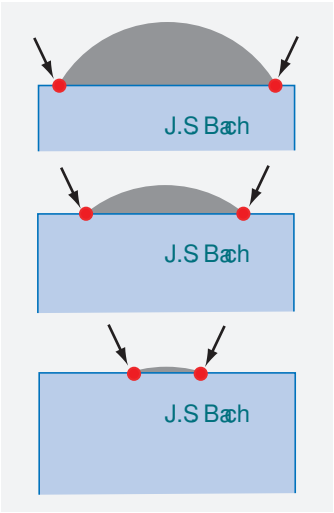


FIGURE 36 光の運動よりも速いもう一つの例

超光速運動をする別の例が, Figure 36に示す古いLPレコードのジャケットへのレコード収納である. レコードとジャケットの境界面は光速で動くことができる.

球形の惑星に住んでいる私たちは別の例を思いつくかもしれない. 床にゴロリとしていて, 立ち上がるとする. 地平線が光より速く遠ざかっているような初速度が存在することを示せるか?

Challenge 72 s

最後に, 標準的な例を示す. 月面にレーザービームを照射した時の光スポットの運動である. レーザーを動かすと, 簡単にスポットの運動を光より速くすることができる. 同様の例が, 十分に高周波の信号が入力された時のオシロスコープのスクリーン上の光の点である.

これらは, いずれも, 影の速度, つまり, 闇の速度の典型例である. 影も闇も, 実は, 光より速く動くことができる. 実際, これらの速度には制限がない. ほかの例も探してみてください.

Challenge 73 s

さらに, 光の位相速度や, 群速度でも, c より大きい速度を示す実験装置がどんどん増えている. これらは, 普通, 「光りよりも速い光」の文言で, 新聞の見出しを飾る. この驚くべき現象については後に議論する. 幾分, 抽象的だが, これらは, 「影の速度」の特殊なケースとみることができる.

Vol. III, page ??

別の例として, 長さ l の真直ぐなトンネルの出口に立っているとする. 速度 v の自動車が向こうの入り口からトンネルに入り, こちらに向かってくる. 車が太陽光に照らされなくなり, 同時に, ヘッドライトを点灯したので, トンネルに入ったとわかる. 私たちが, 車がトンネルに入ったと知ってから, どのくらいの時間t経過したら, 車は私たちの前を通過するだろうか. t は

$$t = l/v - l/c \,. \tag{22}$$

で表せることはすぐわかる. この接近する車の速度v_{appr}は

$$v_{\text{appr}} = \frac{l}{t} = \frac{vc}{c - v} \,, \tag{23}$$

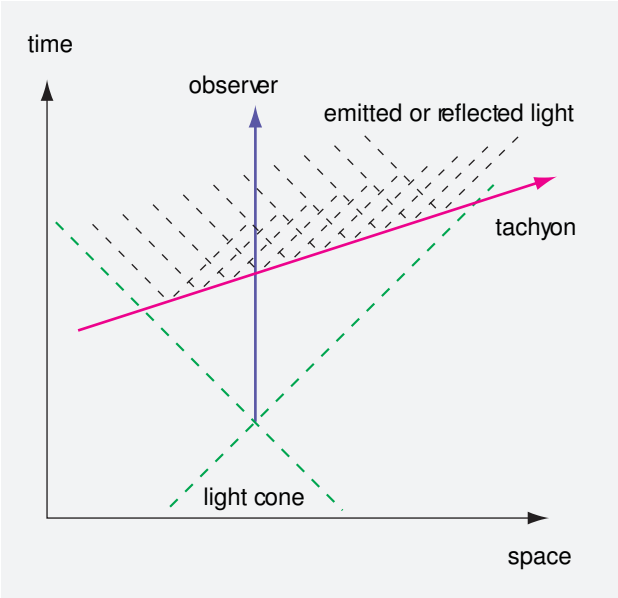


FIGURE 37 タキオン観測についての 仮想時空図

となり, この速度は $c/2$ より大きな速度 v を持つ自動車に対しては c より大きくなる. 車についてこのようなことが起きることはまずないが, 天文学者は空に, 時々高速ジェットガスを噴き出すクエーサー (quasi-stellar object：準恒星物体の略) という明るい物体があることを知っている. ガス放出が地球の方向を向いている場合, 横方向成分しかないその速度は, 見かけ上, c より大きくなる. このようなことは望遠鏡での観測ではよくあることだ. Ref. 67

ところで, トンネルの入り口の観測者にとって, 遠ざかる車の見かけの速度は

$$v_{\text{leav}} = \frac{vc}{c+v}\,, \tag{24}$$

となり, $c/2$を超えることはない. つまり, 物体は光速の半分以上の離れてゆくとは見えないのである.

この話には, 最後の仕掛けがある. 私たちは, 光より速い運動を様々な方法で観測できることを見てきたにすぎない. それでは, 光より速い物体を観測することは出来るのだろうか. 驚いたことに, 変わった方法であれば観測できるかもしれないのだ. まず, タキオンという光より速い想像上の物体は, 近づいてくるときは絶対に観測できない. もし, 見れるとしたら, それは離れてゆく時だ. タキオンを見る ことは超音速ジェットの音を聞くことと似ている. もし, 昼間見えるとしたら, タキオンに気が付くのは通過してしまってからだ. まず, 超音速のジェット機の衝撃音に対応する閃光が見える. それから, Figure 37から導かれるように, タキオンの2つの像が, 空間のどこかに現れ, 反対方向に分かれてゆくのが見える. 一方の像は赤方偏移し, もう一方の像は青方偏移する. 2つの像の一方が仮に近づいて来たとすると, その像はだんだん微かになり小さくなるなるだろう. とても変わった現象である. さらに, 夜に, トーチで照らしてそこからのタキオンの光を見るとしたら, トーチを持つ手と反対の方向に顔をそむけないといけないだろう. この必要性も時空図からわかる. 理由はわかるか. ただ, 誰もこのような現象を目撃した者はまだいない. Ref. 68 Challenge 74 e

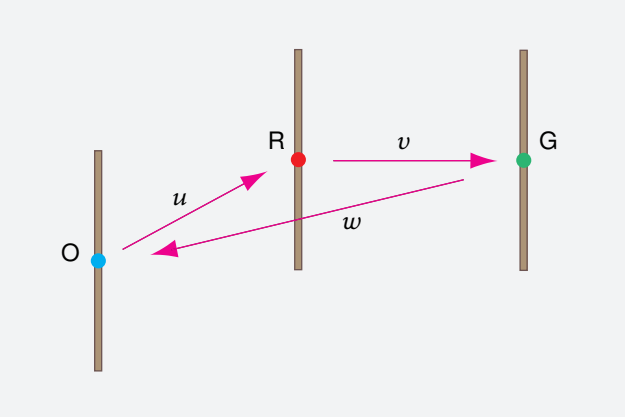


FIGURE 38 棒Oが棒Rに平行で, 棒Rが棒Gに平行であっても, 棒Oと棒Gは平行でない.

Ref. 69
Page 67

タキオンがもし存在したとしたら, 奇妙な物体だろう. タキオンは, エネルギーを失うと加速され, エネルギーゼロのタキオンが最も高速で, 無限の速度を持ち, タキオンの運動方向は観測者の運動に依存する. これらの性質にたいする異議もまだ現れていない. さらに悪いことには, 今, 述べたように, タキオンは無から現れるように思われ, そのため保存則に反するのだ. 注意してほしいのは, タキオンは普通の意味で見ることができないように, 触ることもできない. これらのことは両方とも電磁相互作用によるもので, モーションマウンテン登山のもう少し後で, 考えることにする. 私たちの冒険の量子の部分で, 実際は, 量子論が (実の) タキオンの存在を除外してしまうことを示す. 一方で, 量子論は「仮想」タキオンの存在が必要になるとわかる.

平行線に平行な線は平行でない – トーマス歳差

速度に極限が存在すると, 多くの奇妙な結果を生じる. 二人の観測者が互いに運動していても、それぞれの持つ棒を平行にすることは可能である。ところが, 3本以上の棒にたいしてこの操作を繰り返し, 近接する2本を次々と平行にしていっても, 最初の棒と最後の棒は, 一般に, 平行にならない. 特に, 複数の観測者の速度ベクトルがループになる場合のように, それぞれ異なった方向に運動している時は絶対に平行にならない.

もっとも単純な構成をFigure 38に示す. 特殊相対論では, 単純なブーストを繰り返しつなげても, 1つの単純なブーストに置き換えることはできず, 1つのブーストと回転が合わさったものとなる. 結果的に, 複数の平行な棒のつながりの最初と最後の棒は平行にはならない.

Ref. 70

この効果の例が, 回転運動に見ることができる. 棒を持って, 相対論的速度で, 円を描いて歩くとする. その時, いつも棒は直前の瞬間に対し平行に保つこととする. 回転後, 棒は回転前の方向に対してある角度を持ってしまっている. 同様に, ある回転物体が別の物体の周囲を回っている時, 一周後, 回転物体の軸は最初の軸方向とは同じでない. この効果は, 特殊相対論誕生からまる20年後の1925年にルウェリン・トーマス (Llewellyn Thomas) より発見され, その名にちなんで, トーマス歳差と呼ばれている. この効果は多くの有名な物理学者に注目された. トーマス歳差は原子内の電子の軌道にとって重要である. この場合の棒とは, 高速で軌道運動する電子のスピン軸である. これらの驚くべき現

象はすべて純粋に相対論的なものであって, 速度が光速に近い場合においてのみ測定できる.

ネバーエンディングストーリー – 温度と相対論

熱浴に対し運動している観測者が測定する温度はどうなるか. このトピックについての文献内容は混乱している. マックス・プランク, アルベルト・アインシュタインやボルフガング・パウリは次のような結論で一致している. 速度 v で動いている観測者が観測する温度 T と, 熱浴に対し静止している観測者が観測する温度 T_0 とは

$$T = T_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\ . \tag{25}$$

で関係づけられる. 従って, 運動する観測者は静止している観測者より低い温度を測定する.

1908年, マックス・プランクはこの式を利用し, 熱エネルギーを変換して, ローレンツ変換下でエントロピーは不変であることを導出した. ボルツマン定数 k の発見者であるプランクはこのようにして, ボルツマン定数が相対論的に不変であることを示した.
Ref. 71

しかし, すべての研究者がエネルギ変換に対するこの表現に同意しているわけではない. (ただし, k の不変性については同意されている.) この公式で T と T_0 は入れ替えるべきであると言う人もいる. また, 単純な平方根ではなく別のべき数を提唱するする人もいる.
Ref. 72
これらの不一致の原因は簡単である. つまり, 温度は, 熱浴のような平衡状態おいてのみ定義されるからである. ある観測者にとって熱浴であっても別の観測者にとっては熱浴ではない. 低速の場合は, 運動する観測者は, ほとんど熱浴と考えていい状況にある. しかし, 高速になると, 状況はややこしくなる. 温度は, 原子や分子といった物質粒子の速度から導かれる. 従って, 高速運動する観測者にとっては, 分布が平衡状態ではなくなり, よい温度測定法がない. 運動する観測者にとっての正直に測定された温度値は使用した粒子の速度領域に依存することになってしまう. つまり, 熱平衡は観測者に依存する概念なのである. したがって, 高速に対しては, どんな温度変換式も正しくない. (ある種の仮定をした場合のみ, プランクの式が成り立つ. また, 同様のことが, エントロピーの相対論的変換に対しても生じる.) 実際上は, このような公式をチェックする実験的観測はまだない. このような測定を行うのは将来の実験課題であって, 相対論自身の課題ではない.

楽しみ: 片道の光速とは何か

観測者が慣性であったり, 観測者が (遠方を通過する光ではなく) 近くを通過する光の速度を測定する限りにおいては, 通常の定義通り, 光速は c で与えられることがわかった. つまり, 光速は, 局所的に, 測定されなければいけない. しかし, この条件では後者について微妙に解消されていない点がある.

普通, 長さは光が伝わるのに要した時間から測定する. この場合, 光速は明らかに不変であろう. それでは, その不変性はどうやって確かめられるのか. 長さの測定を行うことはできない. これを行うもっとも簡単な方法は, Figure 39に示すように, 鏡で光を反射させることである. 光速が不変であるとは, 光が短い

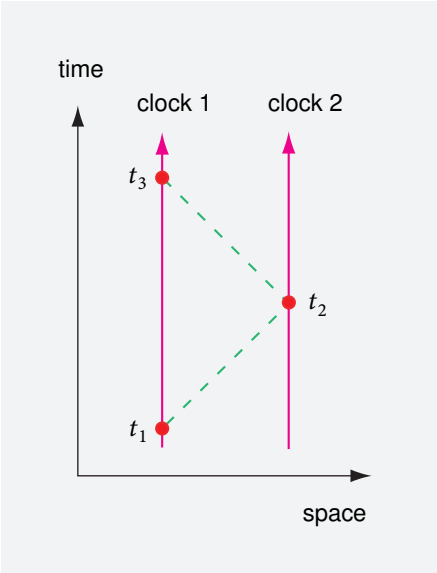


FIGURE 39 往復速度として光速を測定する方法と時計

直線に沿って上下する時, 両端の時計が

$$t_3 - t_1 = 2\,(t_2 - t_1)\,. \tag{26}$$

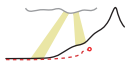
で与えられことを意味する. ここで, 時計はpage 46 の規定に従い同時刻化されている. もし, この因子がちょうど2でなかったら, 光速は不変ではない. 実際のところ, いままでの実験では, 測定誤差範囲内で, この因子は2になっている.

Ref. 73, Ref. 74
Challenge 75 s

しかし, この実験は疑念を生じさせる. つまり, 光の一方向の速度は測定できないように思える. そうですか. このことは重要ですか?

まとめ

どんな物理系に対しても, 局所的に測定されたエネルギー速度, 前面速度, 測定された信号速度は, 真空中の光速 $c = 299\,782\,458\,\mathrm{m/s}$ を超えることはない. その結果, 時間, 年齢, 距離, 長さ, 色, 空間の方向, 角度や温度は, 定義できる限り, 観測者に依存する. それに対し, 真空中の光速 c は不変である.



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Chapter 2

相対論的力学

光速は不変量でもあり，極限値でもある．つまり，速度を利用して定義されている観測可能量はすべて再考する必要がある．すべてをだ．もっとも基本的な観測量は質量，運動量，エネルギーである．言い換えると，力学を不変極限速度を基本にして作りかえる必要がある．これは 相対論的力学を構築する必要があるということだ．

相対論における質量

Vol. I, page ??

ガリレイ力学では，2つの物体の質量比は衝突を用いて定義された．つまり，質量は速度の変化の比の逆数に負の符号を付けたもので定義された;

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} \,. \tag{27}$$

しかし，実験によると，速度が光速に近づくと，この式は成り立たず，変更を迫られる．よく考えれば，実験を行わなくとも，このことは示すことができる．できますか?

Challenge 76 s

質量定義の問題について解はたった一つしかない．実験によると，ガリレイ物理の運動量 とエネルギーに対する2つの保存定理を

Ref. 75

$$\sum_i \gamma_i m_i \boldsymbol{v}_i = \text{const} \tag{28}$$

と

$$\sum_i \gamma_i m_i = \text{const} \,. \tag{29}$$

に変更しなければいけないことがわかる．これらの式は (相対論的) 運動量保存と (相対論的) 質量–エネルギー保存である．これらは私たちのモーションマウンテン登山においてずっと成り立つ．

運動量保存とエネルギー保存によると，SFとは違い，自然界ではテレポーションはできない．これを確認できるか?

Challenge 77 s

ガリレイ物理を適用できるようするには，相対論的補正 (因子) γ_i がほとんど 1 に近い値でなければならない．このことは，速度が，日常的な速度つまり光速からは遠く離れた速度になっている場合に対応している．ガリレイ物理とはまさにこのことなのである．相対論的補正因子の式を知らなくても，Figure 40に示す衝突からこの式を導くことができる．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

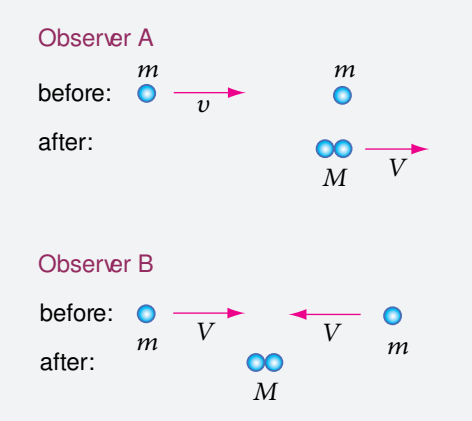


FIGURE 40 2つの異なった慣性系から見た2個の同種粒子の非弾性衝突

第1の座標系 (A) では, $\gamma_v mv = \gamma_V MV$ および $\gamma_v m + m = \gamma_V M$ となる. 第2の座標系の観測者 (B) では, V と V が組み合わさってv がわかる. つまり,

Challenge 78 e

$$v = \frac{2V}{1 + V^2/c^2} \,. \tag{30}$$

となる. これらの式から, 相対論的補正因子 γ が

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{31}$$

となり, 速度 v の強さに依存することがわかる. この式を用いると, 2つの衝突粒子間の質量比は

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{\Delta(\gamma_2 v_2)}{\Delta(\gamma_1 v_1)} \,. \tag{32}$$

のように定義できる. これが質量比の定義のガリレイ物理からの一般化である. (ガリレイ物理の章で, 加速の比を基にした一般化された質量比の定義も使用した. この相対論的一般化については深入りしない. これには, これから先に出会う微妙な問題が含まれているからである.) 修正因子 γ_i を含めることで, この式で定義される質量がガリレイ物理の質量とすれば同じように扱え, 物体が関連するすべての形の衝突が同じになる. * このように, 質量は物体の加速のやりにくさを表す量であることに変更はなく, 複数の物体からなる系に対しても使用できる.

Vol. I, page ??

ガリレイ物理の例に従い, 次の量

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v} \tag{33}$$

を粒子の (線形) 相対論的 (3-) 運動量と呼ぶ. 全運動量は, 外部の影響がない系に対しては保存量となる. この保存則は質量定義法から直接の得られたもので

Challenge 79 e

* この結果は $\gamma = 1 + T/c^2 m$ であることを意味している. ここで T は粒子の運動エネルギーである.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

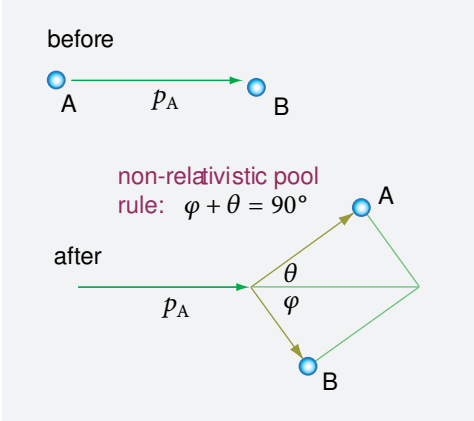


FIGURE 41 非相対論的ビリヤードをプレーする際, 役に立つ法則

ある.

低速, つまり, $\gamma \approx 1$ の場合, 相対論的運動量はガリレイ運動量と同じになり, 速度に比例する. しかし, 高速になってくると, 運動量は速度より速く増加し, 光速に近づくと無限大になる. この結果はFigure 18に示すように, 実験により確認されている. Page 33

相対論的ビリヤードが難しい理由

運動する球や粒子が, 静止している同じ質量の球や粒子に衝突し際に起きるよく知られた性質で, ビリヤードをする時に重要なものがある. Figure 41に示すように, 衝突後, 二つの球は直角の方向へ離れてゆく.

しかし, 実験によると, 直角の法則は相対論的衝突に対してはあてはまらない. 実際, 運動量保存とちょっとしたテクニックを用いれば, 計算により Challenge 80 e

$$\tan\theta \tan\varphi = \frac{2}{\gamma + 1} \,, \tag{34}$$

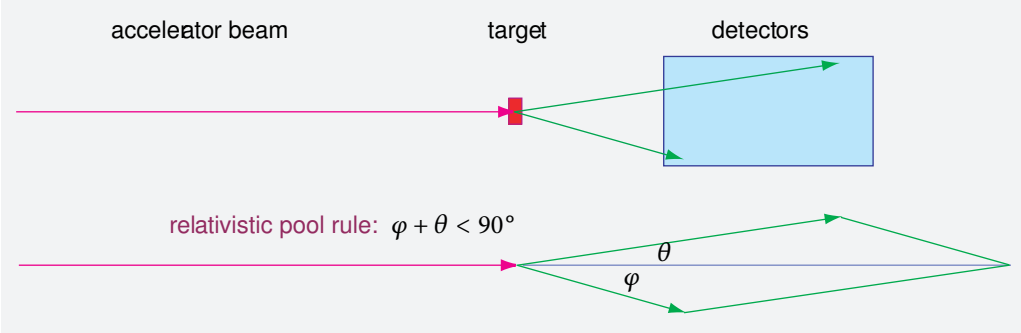
が得られる. ここで角度はFigure 42で定義される. この式によると, 相対論的には, 和 $\varphi + \theta$ は直角より小さい. 相対論的速度はビリヤードを変える. 実際, 加速器物理学者は 電子や陽子に対するこの角度は, 霧箱や泡箱で生じた粒子の軌跡を撮影した写真から簡単にわかることを知っている. その写真の例をFigure 43に示す. これらの写真はいずれも上式で説明できることを示している.

Figure 42に図示するように, 実際の検出器の形状は, 式 (34) に合うように, 選択される. もし, この公式と相対論が誤っていたとしたら, これらの検出器の大部分はうまく動作せず, 衝突後の粒子の検出に失敗するだろう. もし, 相対論が誤っていたら, このような検出器はもっと大型にしないといけないだろう. 実際に, これらの実験では速度の合成式の検証も可能である. これを示せますか. Ref. 16 Challenge 81 e

質量とエネルギーの等価性

Figure 40の 共線非弾性衝突に戻ろう. 最終系の質量 M はどうなるか? 計算に

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net



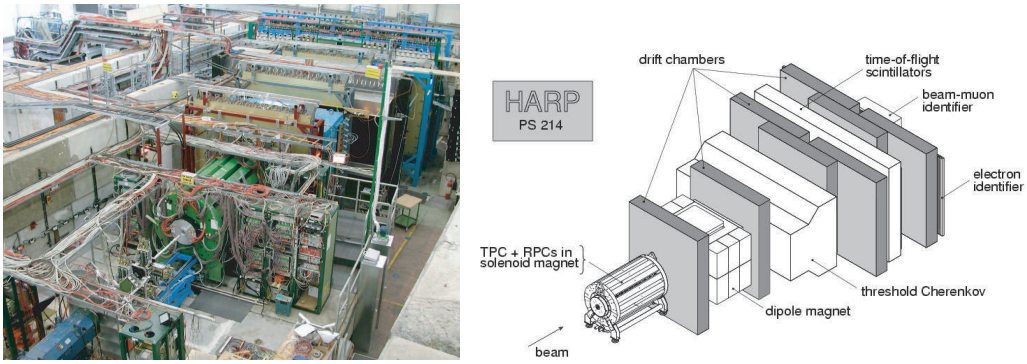


FIGURE 42 単一ビームの加速器の粒子検出器のサイズは, 相対論的ビリヤードの角度則を基本にしている. 一例として, CERNにおけるHARP実験がある. (© CERN)

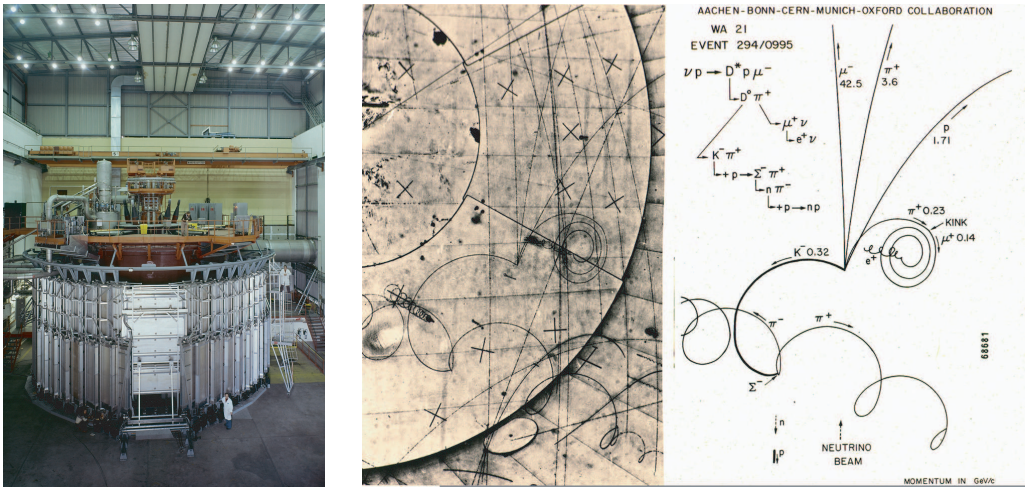


FIGURE 43 'Big European Bubble Chamber' とそれが作り出した相対論的粒子の軌跡の例. 運動量をこの写真から求める. (© CERN)

Challenge 82 s よれば,

$$M/m = \sqrt{2(1+\gamma_v)} > 2\,. \tag{35}$$

となる. つまり, 最終系の質量は, 元の2つの質量和 $2m$ より大きく大きくなる. ガリレイ力学と違うのは, 系のすべての質量の合計が保存量でないことだ. 補正された質量の合計$\sum_i \gamma_i m_i$ だけが保存される.

この疑問に対し, 相対論は答えを与える. 質量 m と速度 v の物体のエネル

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

ギー E について,

$$E = c^2\gamma m = \frac{c^2 m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \tag{36}$$

の式を使い, 系全体と各成分にこれを適用すると, すべて, つじつまが合うようになる. 補正質量の保存は, 因子 c^2 のないエネルギー保存と読める. 融合した2つの同種粒子の例では, 2つの部分はそれぞれの運動量とエネルギーで記述できるが, 出来上がった系全体としては2つの部分のエネルギーの和として与えられるエネルギーEを持つ (補正されていない質量は足し合わせられないことを思い出してください.) 特に, 静止物体のエネルギー E_0 と質量 m との関係は,

$$E_0 = c^2 m\,. \tag{37}$$

で表せる. それでは, なぜ, mc^2 と書かずに c^2m と書いているのだろうか. 理由は公式においては普通, 定数因子を 先にに書くからである. 因子 c^2 が中心ではない. この式の本質はエネルギー E と質量 m の間の関係である. c^2は2つの量の変換因子にすぎない. 一般的な関係 $E = c^2\gamma m$ は, 現代物理の最も美しく最も有名な発見の一つである. 簡単に言えば, 最大速度が存在することにより, 質量がエネルギーを持ち, エネルギーが質量を持つ. 質量とエネルギーは同じ基本概念を2つの言葉で表したものである.

▷ 質量とエネルギーは等価である.

エネルギーと質量は等価なので, エネルギーは質量の性質をすべて持つ. 特に, エネルギーも慣性と重量を持つ. 例えば, 完全に充電された電池は空の電池よりより重いし, 暖かいコップの水は冷えたコップの水より重い. 電波も光も重さを持っており落下する.

逆に, 質量はエネルギーの性質をすべて持つ. 例えば, 質量でエンジンを動かすことができる. しかし, 私たちの使っているすべてのエンジンで, すでに, このプロセスは実現されているので, 目新しいことではない. 筋肉, エンジン, 原子力船はいずれも, ほんの少しだけ質量を失って動作しているし, 摩擦に打ち勝ち, 人, 車や船を動かすのにそれ相応のエネルギーを使用している.

変換因子 c^2 は大きい. 岩1 kgを電気的エネルギーに変換したら80億ユーロの価値になるだろう. この理屈でいえば, 最大級の財政であっても, ちょっとした大きさの岩にしかならない. c^2 は非常に大きいので, つぎのようにも言えるだろう.

▷ 質量はエネルギーが集中したものだ.

系のエネルギーを増やすとその質量は少し増え, エネルギーを減らすとその質量も少し減る. もし, 閉じた箱の中で爆弾を爆発させると, 箱の質量, 重量や運動量は爆発前後で変わらないが, 箱の中の破片の全質量は爆発前より少し小さくなる. 核爆弾に限らずどんな爆弾でも, その破壊のパワーは質量の減少から取り出している. 実際, 系のどんな活動, 例えば, 気遣いや微笑, 何かを見る行為でも, 質量の減少によりそのエネルギーを手に入れていることになる.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

運動エネルギー T は, 全エネルギーと静止エネルギーの差で与えられる. これは, (二項定理を用いると)

$$T = c^2\gamma m - c^2 m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}m\frac{v^4}{c^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}m\frac{v^6}{c^4} + \ldots \tag{38}$$

Challenge 83 e となる. この式は, 日常的な低速度にあっては, よく知られたガリレイの値 $T_{\text{Galilean}} = \frac{1}{2}mv^2$ になる.

質量-エネルギー等価性 $E = c^2\gamma m$ は, 物質系から任意のエネルギーを取り出すと質量が小さくなることを意味している. 人がピアノを弾いても, 考えても, 走っても, その人の質量は減少する. カップのティーが冷えても, 星が輝いてもその質量は小さくなる. 誰かが他の人の電力を使ったら, その人は質量を幾分持ち去ったことになる. 電力の窃盗は質量の窃盗だ！質量-エネルギー等価性は自然界すべてに満ち溢れている.

物体の全質量を運動エネルギーに変換するための有名な方法が1つだけある. この場合, 生じる運動エネルギーは電磁エネルギーである. 物質を同じ量の反物質を用いて消滅させる方法である. 幸運なことに, 宇宙には反物質はほとんど無いので, この過程は日常生活では起きない. ほんのわずかなほこりであっても, それがもつエネルギーは莫大なもので, もし, 同じ量の反物質と消滅したら危険な事象になるだろう.

Challenge 84 e

質量-エネルギー等価性は, 光をうまく利用したり, 衝突の運動エネルギーを引き出すと質量のある粒子を生成できることを示唆している. これは全くその通りで, エネルギーを他の物質に変換するということが, 銀河の中心, 加速器の中, また, 宇宙線が地球の大気との衝突した時は絶えずで起きている. これらの詳細については量子物理を探検する時にわかるだろう.

質量-エネルギー等価性 $E = c^2\gamma m$ は多くのSFファンタジーの死を意味している.質量-エネルギー等価性は 未発見のエネルギー源が地球上やその近くにはないことを意味している. もし, そんなものがあったら, 質量が測定されているだろう. これまでも現在も多くの科学者が探し続けているにもかかわらず, 見つかったという報告はない. 自然には, 自由に使えるエネルギーはない.

多くの科学者は次々と不思議なことを見つけ出す. ダークマターと (それと混同されがちな) ダークエネルギーと呼ばれる2つの極端に薄められたエネルギー形式が宇宙に分布していることが, 1990年代に発見された. その密度は約 $1\,\text{nJ/m}^3$ である. これらの存在は非常に綿密な質量検出測定から導かれた. しかし, その源については, よくわかっていない.

Page 205

光の重さの測定

質量-エネルギー等価性 $E = c^2\gamma m$ によると, ほんの1グラムだけ重量を増やすのに, 約90億kJ, つまり210 億 kcal必要であることを意味している. もちろん, ダイエットを目指している人は別の意見をお持ちと思う！人は食べたり, 飲んだり, 呼吸により取り込んだ物質の分解前の結合エネルギーを減らすことで, 日常生活のエネルギーを得ている. しかし, この化学質量欠損について, 反応前後の重量変化が測定できたことはない. この差は, 大きな変換因子 c^2 のため, 非常に小さい. 実際, どんな化学反応でもボンドあたりの化学結合エネルギーは約 1 aJ (6 eV) で, 質量変化にすると100億分の1程度で, あまりにも小さく, 人の

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

体重測定や, 食事や排泄の質量差を決定することはできない. 従って, 普通は化学反応により質量は一定としてかまわず, ガリレイ物理と一致する.

質量-エネルギー等価性 $E = c^2\gamma m$ は, これまでに行われた実験で確認されている. 最も簡単なのは, 原子核の質量欠損の測定である. 最も精密な測定は2005年から始められ, 中性子捕獲前後やガンマ線放出前後での原子核の質量差を測定するものである. この時, 質量–エネルギーの関係は6桁以上の精度で確認された.

現在行われている単一分子の質量測定の方法を用いると, 化学質量欠損すら測定可能になる. つまり, 1つの分子の質量と, 分子を構成する原子の総質量を比較することがが可能になる. デビッド・プリチャード (David Pritchard) のグループは, いわゆる, ペニングトラップを開発した. この装置は周波数測定から質量を決定でき, これらのサイクロトロン共鳴実験の精度は, ボンド結合の
Ref. 77 $\Delta E_0 = c^2\Delta m$ を確認するのに十分である. 将来, 高精度なこの方法を用いて, ボンドエネルギーが測定されるだろう. 結合エネルギーにはしばしば光が照射されるので, これらの現在のテクニックを用いて, 光の 重さの測定が可能になるかもしれない.

光と質量について考えることは, 質量–エネルギー関係についての アインシュタインの導出の基本である. 質量 m の物体が, 全エネルギー E の2つの同じ光ビームを反対方向に放出したとすると, 物体のエネルギーは放出分だけエネルギーが減少する. その時, 物体の質量はどうなるかを考えてみよう. 2つの光のエネルギーと運動量は等しいので, 物体は動かない. そのため, 質量変化については何もわからない. しかし, この状況を, ビーム方向に非相対論的な速度 v で動いている観測者が見ると, 何か導けるかもしれない. 私たちはドップラー効果のおかげで, 因子 $1+v/c$ および $1-v/c$ 分だけ, 一方のビームは赤方偏移し, もう一方のビームは青方偏移することを知っている. 青方偏移は運動量
Challenge 85 e $vE/2c^2$ だけ過剰にもらい, 赤方偏移ビームは同じ分だけ少なくなる. 自然界においては運動量は保存する. 従って, 放出後, 物体は $p = mv - vE/c^2 = v(m - E/c^2)$ だけの運動量を持つことになる. そして, 物体はエネルギー E の物体は E/c^2 だけエネルギーを失う. これが, 質量とエネルギーの等価性である.

要するに, 質量mから取り出せる最大のエネルギー, 物体の静止エネルギー E_0 は

$$E_0 = c^2 m\,. \tag{39}$$

である. ドップラー効果は光速不変の結果であることを先ほど述べた. 光速不変が運動量保存とエネルギー保存が結びつくと, 質量とエネルギーの等価性が現れる.

運動量とエネルギーはどういう関係にあるのだろうか. 運動量 (33) とエネルギー (36) の定義から2つの基本的な関係が導かれる. まず, 運動量とエネル
Challenge 86 e ギーの強度は

$$c^4 m^2 = E^2 - c^2 p^2 \tag{40}$$

で関係づけられる. この関係は物体であろうと輻射であろうと, すべての相対論的系で成り立つ. 運動量ベクトルに対しては, 別の重要な関係式

$$\boldsymbol{p} = \frac{E}{c^2}\boldsymbol{v}\,, \tag{41}$$

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

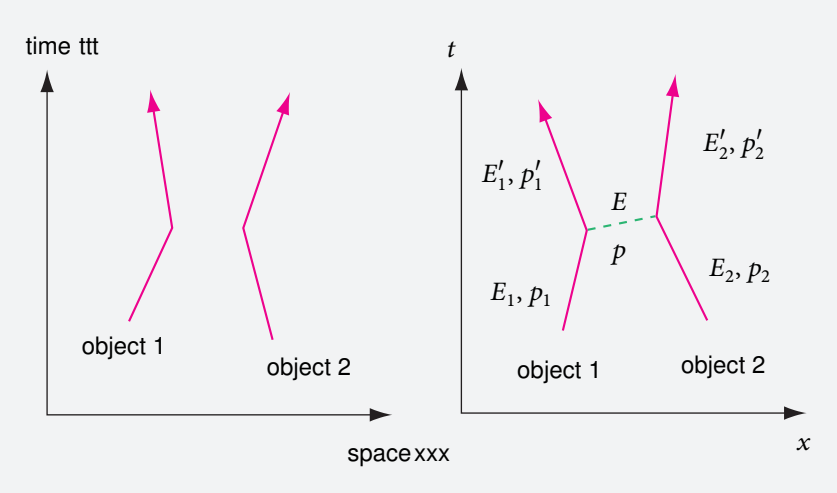


FIGURE 44 二人の異なった観測者から見た同じ衝突の時空図

を得る. この式も, 物体でもビームでも輻射パルスでもどんなタイプの移動エ
Challenge 87 e ネルギーでも 成り立つ. * 以下の議論も含め, モーションマウンテンでは今後この2つの関係式を使ってゆく.

衝突, 仮想物体とタキオン

私たちは, 今, 相対論的衝突における全エネルギーと全運動量の保存は, 本質的に, 質量の定義の結果であることをみた. 衝突についてもっと詳細に見てみよう. 衝突はひとつのプロセス, つまり, 一連の事象であって,

— 相互作用の前後で全運動量は変わらない.
— 運動量は時空の小さな領域で交換される.
— 低速においては, ガリレイの記述が成り立つ.

日常生活における衝撃 とは2つの物体が運動量を変える事象のことである. しかし, これが起きる時, 2つの衝突物体は異なった位置にある. 従って, 衝突を時空図で記述すると, オリオン座を思い起こさせるFigure 44の左側の図のようになる. 前述の定義に従うと, 衝突は, このような図になることは簡単にチェック
Ref. 78 できる.
Challenge 88 e

Figure 44の右の図は, 同じプロセスをギリシア文字の座標系から見たものである. ギリシア文字の座標系の観測者は, 第2の物体の運動量が変化する前に, 第1の物体の運動量が変わったと言うだろう. このことは, 運動量とエネルギーが保存されない時間がほんの少しだけあったことを意味している.

この状況を理にかなうようにするための唯一の方法は, 点線で描いたような第3の物体を交換させることである. この物体の性質を調べてみよう. 質量, エネルギー, 運動量の下付き数字で, 第1と第2の物体を表し, 衝突後の量であることをプライムで記すと, 第3の未知の物体の質量 m は,
Challenge 89 e

$$m^2c^4 = (E_1 - E_1')^2 - (p_1 - p_1')^2c^2 = 2m_1^2c^4 - 2E_1E_1'\left(\frac{1 - v_1v_1'}{c^2}\right) < 0\,. \qquad (42)$$

* 4元ベクトルを用いると, $\boldsymbol{v}/c = \boldsymbol{p}/P_0$ と書ける. ここで $P_0 = E/c$.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

であらわされる. この結果は非常に奇妙である. 未知の質量が虚数になっているからだ. * まず, 第2の図から, 交換している物体は光より速いことがすぐわかる. これはギリシア語ταχύς '速い'という言葉に由来するタキオンである. 言い換えると, 衝突には 光速より速い運動が関与している. 衝突は, 自然界でタキオンが役割を果たしているただ1つの例であることを後で調べる. 交換物体は衝突の間だけ現れて, それだけでは存在しないことから, 観測できる普通の実の物体と区別し, 仮想物体と呼ぶ. ** 仮想粒子の性質については, 後に, 量子論を議論する際, 学ぶ.

Vol. IV, page ??

自然界にあっては, タキオンはいつも仮想物体である. 実物体は, ギリシア語の βραδύς 'ゆっくり'を語源とするブラディオン, つまり, 光よりゆっくり動く物体である. ただし, タキオンは光速であっても, 光より速くエネルギーを輸送することはできず, 等確率で放出・吸収されれば, 因果律を破ることはない. 確認してみてください.

Challenge 90 e

量子理論を学ぶと, 物体間の一般的な接触相互作用は単一の仮想物体の交換で記述されず, 仮想粒子の連続的な流れで記述される. 日常の普通の衝突は, 電磁的な相互作用によるものである. この場合の交換粒子は仮想光子である. 言い換えると, 何かに触ったり, 石を押したり, 山が木々を保持したりしている時は, 絶えず, 仮想光子の流れが交換されている.

Vol. IV, page ??

衝突には, 他にも隠された秘密がある. Figure 44の右図ではタキオンは第1の物質から放出され, 第2の物質に吸収されている. しかし, これが, 逆になる観測者も想像できる. つまり, タキオンの運動方向は観測者に依存する. これが反物質を暗示している. 時空図では物質と反物質は反対方向に運動する. 量子論では, 相対論と反物質の関連がもっと明確になるだろう.

Challenge 91 s

Vol. IV, page ??

粒子系 – 重心がない

相対論では, なじみのある重心という考え方も放棄する. このことは2つの同種物体の衝突という簡単な例からからわかる.

Figure 45は2個の衝突粒子の1つが静止している視点から見ると, 重心を定義する時, 少なくとも3種類の方法があることを示しており, 重心は観測者にとって不変量として定義することができない. 図から, 系の成分が互いに小さな速度で動いている場合にのみ, 重心の概念が意味を持つことがわかる. 原子がその例である. もっと一般的な系についても, 重心は一義的に定義できない.

Ref. 79

この重心問題は私たちの登山の妨げになるのだろうか. そんなことはない. 私たちが複合物体や系より, 単一粒子に興味があるからだ.

なぜ, 運動はこんなにゆっくりしているのか

日常的によく見る系では, 膨張因子 γ は1に非常に近い. 1から離れていると気付くこと, すなわち, 光速の数パーセントになることはほとんどない. このよう

* 普通, タキオンの質量-エネルギー関係式と質量-運動量関係式は $E = \pm c^2 m/\sqrt{v^2/c^2 - 1}$ と $p = \pm mv/\sqrt{v^2/c^2 - 1}$ のように変更される. これはmの再定義である. この再定義により, タキオンの質量は実数になる. このエネルギーと運動量の関係によれば, タキオンは高速になるにつれて, エネルギーと運動量を失うことになる. (大げさな言い方をすれば, 箱の中の1個のタキオンで, 人類に必要なエネルギーをすべて供給できるかもしれない.) エネルギーと運動量に付いている正負の符号は両方とも必要である. そうでないと, すべての慣性観測者の等価性を作り出せなくなってしまうからである. このようにタキオンは最小エネルギーも最大エネルギーも持たない.

** もう少し詳しく言うと, 仮想粒子は, 実粒子で成り立つ関係式 $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$ にも従わない.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

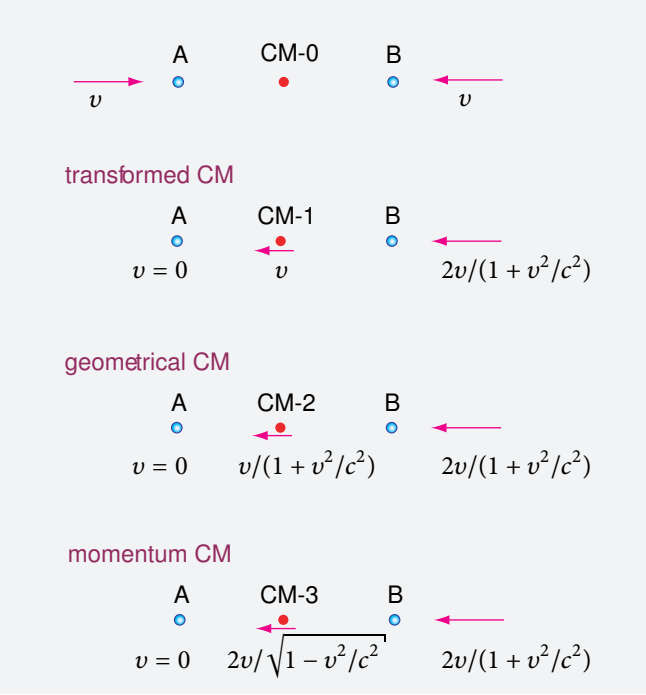


FIGURE 45 相対論的な重心を矛盾なく定義することはできない.

なケースは大体微視的な場合である. 初期のカラーテレビのブラウン管や加速器内部の電子についてはすでに説明した. 宇宙線の構成成分の粒子などもこの例である. ちなみに, 宇宙線の高エネルギーは, 地球上の動物や植物の進化のもとになる突然変異を起こした. あとで, 放射線に関連する粒子も相対論的であることがわかるだろう.

しかし, なぜ相対論的巨視物体は見られないのだろうか. 理由は, 宇宙は長い間存在しているからだ. 物体は日常生活で相対論的速度で衝突することは見られない. それが起きると, 運動エネルギーの一部は $E = c^2\gamma m$ に基づいて, 新しい物質に変化してしまう. 宇宙の歴史において, このようなことは何度も起き, 巨視的物体は環境に対しゆっくり運動するようになり, 依然として, 相対的運動している物体は微視的粒子だけになってしまった.

高速の相対運動が消えてしまった第2の理由は輻射減衰である. 衝突や光線浴において相対論的電荷に何が起きるか想像できるか? 輻射減衰も巨視的粒子を減速させる.

Challenge 92 s

つまり, 宇宙のほとんどすべての物質は, 他の物質に対しゆっくりと運動している. その反例はまれで, 先に述べたクエーサージェットのように非常に古いものか, 短時間でおさまってしまうようなものである. 例えば, 巨視的相対運動に必要な巨大なエネルギーは超新星の爆発で得られが, その相対論的運動は数週間後には消えてしまう. まとめると, 宇宙はゆっくりとした運動で満ちている. 宇宙は生まれてから長い時間経っているからだ. その年齢については後述する.

Page 214

質量-エネルギー等価性の式の歴史

アルベルト・アインシュタイン (Albert Einstein) は特殊相対論の最初の論文の

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

後, 数か月かけて, 公式

$$E = c^2 \gamma m \tag{43}$$

を導出した. この式は, 物理学上もっとも有名な公式としばしば言われる. ここでは, 普通とはやや異なった書き方をし, c^2 が単位に依存した重要性のない因子であることを強調している. このような種類の因子は, 普通, 物理公式の始めに書くのが普通である. * アインシュタインはこの公式を, 1905年の終わり,
Ref. 17 第2の独立した論文で発表した. この公式は30年前, 電磁気学の理論から導かれていたかもしれなかった.

実際, アインシュタインより前に, 同じ結論を導いた人も何人かいた. アインシュタインが最初の相対論の論文を発表する前の1903年と1904年に, あまり
Ref. 80 知られていないイタリアの技術者オリント・デ・プレト (Olinto De Pretto) が計算と考察を行い, 公式 $E = c^2 m$を発表した. アインシュタインは, 友人のミケーレ・ベッソ (Michele Besso) か, 当時イタリアに在住していた両親を訪問した時出会ったイタリア語を話せる他の友人を通して, デ・プレトの話を聞き, この公式を着想したのかもしれない. **もちろん, これによりアインシュタインの努力の価値が低められるものではない.

実際, 同様の公式が1904年に, フリードリッヒ・ハーゼンエール (Friedrich
Ref. 80 Hasenhrl) により導出されていて, 1905年, Annalen der Physikに発表された. これも, アインシュタインより, 早かったが, 計算の誤りから数値因子は誤っていた. また, アンリ・ポアンカレ (Henri Poincar) も, 1900年に, 2つの論文に発表されたいくつかの式に, 公式$E = c^2 m$が入っていた. また, ポール・ランジュバン (Paul Langevin) もこの式を知っていて, もし, 以前に, 発見されていなかったら , 彼が特殊相対論の発見者になったのは間違いないだろうと, アインシュタインは言った. トルバー・プレストン (Tolver Preston) も, 1875年, 質量とエネルギーの等価性について, 彼の著書「エーテルの物理 (Physics of the Ether)」の中で議論していた. この話の実際のヒーローはスイスの化学者ジャン・マリニャック (Jean Charles Gallisard de Marignac) で, 1861年に元素の成り立ちについて現在受け入れられている考え方を発表していた. つまり, 陽子が原子を構成していて, 凝縮すると全質量が小さくなり, そのエネルギー差ははエネルギーとして放出される. 質量-エネルギーの等価性はこのように実際は宙に浮いたままで, 正しく筋立てられるのを待っていた.

Vol. V, page ?? 1970年代に, よく似た話が出てきた. 加速と真空の温度の間の簡単な関係が発見された. この結果が導かれるの50年かかった. 実際, それに先立ってたくさんの結果が文献の中に見られる. 現代物理には, 発見されるのを待っている簡
Challenge 93 s 単な関係式が隠されているのだろうか?

4元ベクトル

運動を, すべての観測者にとって, 矛盾のないように記述するには, どうすればいいのだろうか. そのためには, 4元ベクトルと言う考え方を導入すればよい. 粒子の運動は一連の事象であることをすでに知っている. 事象とは時空の点である. 正確に事象を記述するために, 4元座標と呼ばれる事象の座標を導入す

* 例としては, $A = 4\pi r^2$, $a = Gm/r^2$, $U = RI$, $F = (1/4\pi\varepsilon_0)Q^2/r^2$, $pV = RT$, $S = k \ln W$などがある.
** ウンベルト・バルトッチ (Umberto Bartocci) , イタリア, ペルージャ大学の数学教授. この驚くべき話を論文や本に発表した.
Ref. 81

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

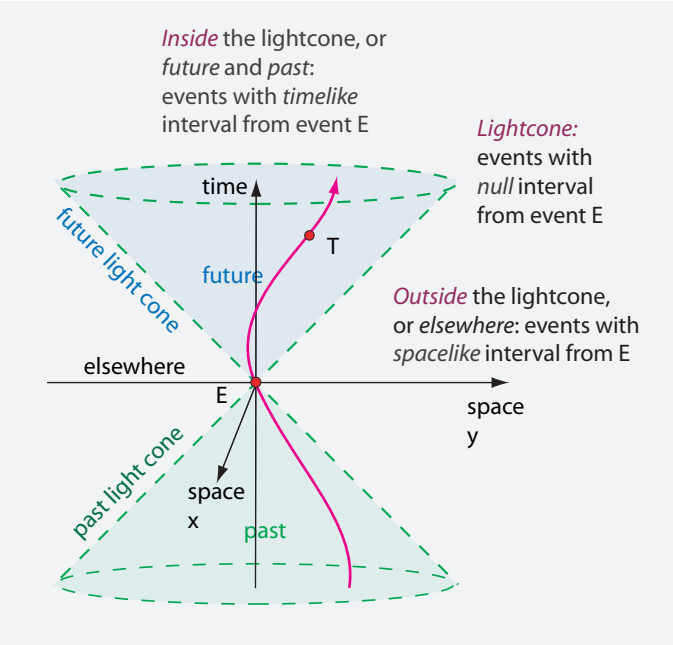


FIGURE 46 運動物体Tの時空図. 空間の1つの次元は省略してある.

る. この座標は

$$\boldsymbol{X} = (ct, \boldsymbol{x}) = (ct, x, y, z) = X^i \,. \tag{44}$$

のように書ける. 事象は4次元時空の点なので4つの座標で表せる. 4つの座標は, それぞれ, 第*0*成分, つまり, 時間 $X^0 = ct$, 第*1*成分, 普通, $X^1 = x$, 第*2*成分, $X^2 = y$, そして, 第*3*成分, $X^3 = z$ である. 実際, $\boldsymbol{X}$ は最も簡単な*4*元ベクトルの例である. 昔から使われているガリレイ物理のベクトル $\boldsymbol{x}$ は*3*元ベクトルとも呼ばれる. 時間は4元ベクトルの第0成分として取り扱われている.

2つの事象間の時空距離つまり時空間隔は差ベクトル $\boldsymbol{X}$ の長さで定義できる. 普通は, 長さの2乗, すなわち, 大きさを使い, めんどうな平方根は使うのを避ける. 特殊相対論では, 4元ベクトル $\boldsymbol{X}$ の大きさ $\boldsymbol{X}^2$ は,

$$\boldsymbol{X}^2 = {X_0}^2 - {X_1}^2 - {X_2}^2 - {X_3}^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 = X_a X^a = \eta_{ab} X^a X^b = \eta^{ab} X_a X_b \,. \tag{45}$$

のように定義される. 時空間距離の2乗は時間間隔の2乗マイナス空間距離の2乗である. 前に, このマイナス符号は光速不変性の結果であることを調べた. 空間距離の2乗と違うのは, 時空距離の2乗は正にも, 負にも, ゼロにもなることである.

Page 37

時空間隔は, どのように想像すればいいか. 時空間隔の大きさは固有時間を c 倍したものの2乗である. 固有時間とは時空の2つの事象間を一定速度で直線運動をする時計の示す時間である. 例えば, 空間内の始めの事象と終わりの事象が光速運動でつながっている場合は, 固有時間と時空間隔はゼロになる. この状況は, いわゆる, ヌルベクトルまたは光的を定義している. すべてのヌルベクトルの終点の集合を光円錐と言う. これをFigure 46に示す. もし, 2つの事象間の運動が光速より遅い場合, 固有時間の2乗は正になり, この時空間隔を時間的という. 負の時空に対しては, 間隔が空間的であると言う. 後者の場合, 正

Page 42

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

数となる大きさのマイナス値を固有距離という. 固有距離は物体の移動に沿って走行距離計で測る長さである.

Challenge 94 e 光円錐, その内部と外部は観測者に依存しない. 従って, この考えは一般的なものとして利用できる.

時空の定義において, 相対論で有用な2つの表記法を導入しておく. まず, 同じ添字が現れた時には, その添え字について和をとる. 従って, $X_a X^a$ は, すべての添え字 a について, 積 $X_a X^a$ を計算し, それらの和をとる. もう1つは, すべての4元ベクトルで, 座標を2つの方法, つまり, 上付き添字の座標と下付き添字の座標であらわし区別する. (3元ベクトルでは下付添字だけであった.) これらは次の一般的関係で関係づけられる.

$$\begin{aligned} X^b &= (ct, x, y, z) \\ X_a &= (ct, -x, -y, -z) = \eta_{ab} X^b \,, \end{aligned} \tag{46}$$

ここで, いわゆる, 計量η^{ab} を導入した. これを行列で書くと*

$$\eta^{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{47}$$

となる. あわてないでください. これで, すべてです. これ以上難しくはなりません. (この行列の一般化は, 後の一般相対論のところで使用します.) それでは物理に戻る. これで, 時空での運動を記述する準備が整った.

4元速度

すべての観測者にとって利用できる方法で, 物体の速度を定義してみよう. この場合, 速度を座標の時間微分として定義することはできない. 時間と時間的順序は観測者に依存するからである. では, どうするか. 答えは, 物体に固定された時計の示す時間で定義する固有時間 τ に関連付けて, すべての観測可能量を定義することだ. 相対論では, いつも, 運動や変化の測定は, 運動座標系に設置された時計に対して行う.

従って, 物体の相対論的速度, つまり*4*元速度$\boldsymbol{U}$は4元座標 $\boldsymbol{X} = (ct, \boldsymbol{x})$ の固有時間に対する変化率で定義される. すなわち,

$$\boldsymbol{U} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\tau} \,. \tag{48}$$

座標 $\boldsymbol{X}$ は, 特定の慣性観測者により定義される座標系に対するものである. 4元速度 $\boldsymbol{U}$ の値は, 日常生活での速度と同じように, 観測者や使用している座標系に依存する. $\mathrm{d}t = \gamma \, \mathrm{d}\tau$ を用いると,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \text{ ここで } \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,, \tag{49}$$

Ref. 82 * これは時間的記法とよばれ, 世界の物理の教科書の80 パーセントがこの記法を用いている.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

となり，4元速度と3元速度$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$の関係が得られる:

$$U^0 = \gamma c \,, U^i = \gamma v_i \quad \text{or} \quad \boldsymbol{U} = (\gamma c, \gamma \boldsymbol{v}) \,. \tag{50}$$

速度が小さいと，$\gamma \approx 1$ になり，4元速度の最後の3成分は，普通のガリレイの3元速度になる．4元速度 $\boldsymbol{U}$ の大きさは，$\boldsymbol{UU} = U_a U^a = \eta_{ab} U^a U^b = c^2$ になり，3元速度 $\boldsymbol{v}$ には依存せず，時間的ベクトル，つまり，光円錐の内部のベクトルであることがわかる．

一般的には，4元ベクトルは，ある慣性観測者から，x 方向に相対速度 V で動いている別の観測者に変わった時，

$$\begin{aligned} H^0_V &= \gamma_V (H^0 - H^1 V/c) \\ H^1_V &= \gamma_V (H^1 - H^0 V/c) \\ H^2_V &= H^2 \\ H^3_V &= H^3 \end{aligned} \tag{51}$$

のようなブーストで変換する量 (H^0, H^1, H^2, H^3) として定義される．x 方向以外の他の座標に対する変換も同様にできる．この関係式から任意の3元ベクトル相対論的変換則も導出できる．この定義から3元速度の合成式 (9) を導いてみてください．

Challenge 95 s

4元ベクトルの全成分がゼロでなくても，4元ベクトルの大きさはゼロになることがある．このようなベクトルを ヌル という．どのような運動がヌル速度になるのか?

Challenge 96 s

4元加速度と固有加速度

同様に，物体の 4元加速度 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{X}}{\mathrm{d}\tau^2} \,. \tag{52}$$

で定義される．$\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}\tau = \gamma \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t = \gamma^4 \boldsymbol{va}/c^2$ を用いると，$\boldsymbol{B}$ の4つの成分と3元加速度 $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ の間の次の関係が得られる．

Ref. 83

$$B^0 = \gamma^4 \frac{\boldsymbol{va}}{c} \quad , \quad B^i = \gamma^2 a_i + \gamma^4 \frac{(\boldsymbol{va}) v_i}{c^2} \,. \tag{53}$$

4元加速度の大きさBも，簡単に，$\boldsymbol{BB} = \eta_{cd} B^c B^d = -\gamma^4 (a^2 + \gamma^2 (\boldsymbol{va})^2/c^2) = -\gamma^6 (a^2 - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})^2/c^2)$. となる．注意してほしいのは，この大きさは3元加速度 $\boldsymbol{a}$ に依存していることである．また，ある慣性観測者対して加速されている物体は，他のすべての慣性観測者に対しても加速されていることがわかる．また，速度が光速に比べて小さくなくても，3元加速度はローレンツ不変ではない．

Challenge 97 e

▷ 慣性観測者が異なると，測定される3元加速度も異なる

これは，加速度は観測者の速度に依存しないという私たちの日常生活やガリレ

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

イ物理と相反している.

4元加速度は光円錐の外側にある. つまり, 空間的なベクトルである. また, $\boldsymbol{BU} = \eta_{cd} B^c U^d = 0$ である. これは, 4元加速度は, 4元速度に対し垂直であることを表す. *

3元加速度 $\boldsymbol{a}$ が3元速度 $\boldsymbol{v}$ と平行の時は, $B = \gamma^3 a$ になり, $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{v}$ に垂直の時は, $B = \gamma^2 a$ になる. 私たちはこの結果を, すぐ後に, 利用する. 3元加速度は, ある慣性観測者から別の慣性観測者に移ったとき, どのように変わるのだろうか. 話を簡単にするために, 粒子に静止している観測者, つまり, いわゆる, 共動観測者を導入する. 共動観測者にとっての3元加速度を, 共動加速度または固有加速度といい, この場合, $\boldsymbol{B} = (0, \boldsymbol{a})$ および $\boldsymbol{B}^2 = -a^2$ になる. 固有加速度とは, 共動観測者が感じる加速度を記述している. つまり, 固有加速度は加速する座席に押し付けられる感覚である. 固有加速度は, 相対論における加速運動を調べる際, もっとも重要で, もっとも有用な概念である.

固有加速度は重要な量である. 移動物体に対する観測者の相対速度がいくらであろうと, 固有加速度より大きな3元加速度を観測する観測者はいない. このことについて, これから調べよう.

式 (53) と (51) を用いると, 任意の慣性観測者が測定する3元加速度 $\boldsymbol{a}$ が, 共
Ref. 84 動観測者によって測定される固有加速度 $\boldsymbol{a}_c$ とどういう関係に あるかを計算することができる. この場合, $\boldsymbol{v}$ は二人の観測者の相対速度でもあり, 加速される粒子の速度でもある. 計算結果は

$$a^2 = \frac{1}{\gamma_v^4}\left(a_c^2 - \frac{(\boldsymbol{a}_c \boldsymbol{v})^2}{c^2}\right), \tag{56}$$

Page 72 となる. 形はやや異なっているがすでに知っていることだ. もう一度, 記述してみると,

▷ 共動または固有3元加速度は, どんな場合でも, 他のどんな慣性観測者が測定する3元加速度より大きい.

慣性観測者が加速系に対し速く動けば動くほど, その観測者が測定する3元加
Challenge 99 e 速度は小さくなる. この式は, また, 速度が加速度と垂直な時にはブーストによる因子は $1/\gamma_v^2$ になるのに対し, 平行な時には因子は $1/\gamma_v^3$ になる.

固有加速度が最大になると言う性質は, 速度の場合とは異なり, 相対論的とはよべない. 言い換えると, 加速度では, 相対論的な扱いが必要なのは関与する速度が相対論的な場合のみである. 速度が遅ければ, 加速度が非常に大きくても, ガリレ イ物理として扱える.

---

* 同様に, 物体の 4元ジャーク $\boldsymbol{J}$ は

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}^2\boldsymbol{U}/\mathrm{d}\tau^2 . \tag{54}$$

Challenge 98 e のように, 定義される. 3元ジャーク $\boldsymbol{j} = \mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}t$ との関係は,

$$\boldsymbol{J} = (J^0, J^i) = \left(\frac{\gamma^5}{c}(\boldsymbol{jv} + a^2 + 4\gamma^2\frac{(\boldsymbol{va})^2}{c^2}), \gamma^3 j_i + \frac{\gamma^5}{c^2}((\boldsymbol{jv})v_i + a^2 v_i + 4\gamma^2\frac{(\boldsymbol{va})^2 v_i}{c^2} + 3(\boldsymbol{va})a_i)\right) \tag{55}$$

Page 86 のようになり, この式は後に使用する. 驚くべきは, $\boldsymbol{j}$ がゼロでも, $\boldsymbol{J}$ はゼロにならない. なぜでしょう.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

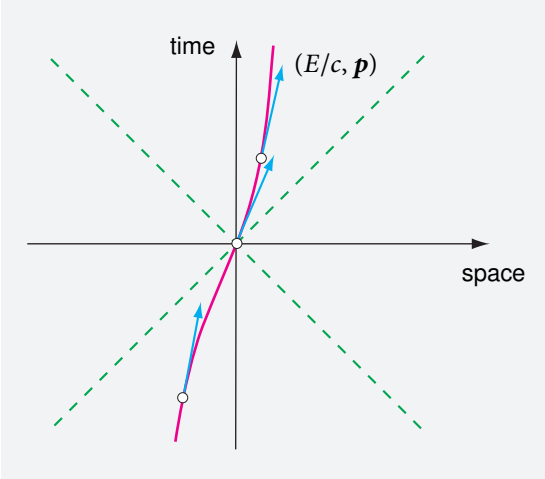


FIGURE 47 エネルギー・運動量は世界線に接している.

4元運動量, エネルギー・運動量, MOMENERGY

運動を記述するには, 運動量の概念はどうしても必要である. *4*元運動量は,

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{U} \tag{57}$$

で定義され, 3元運動量 $\boldsymbol{p}$ とは,

$$\boldsymbol{P} = (\gamma mc, \gamma m\boldsymbol{v}) = (E/c, \boldsymbol{p}) \,. \tag{58}$$

で, 関係づけられる. このため, 4元運動量は, エネルギー・運動量 4元ベクトルとも呼ばれる. つまり,

▷ 物体の4元運動量, すなわち, エネルギー・運動量は質量を単位時間当たりの4元変位倍したものである.

これはエネルギーと運動量の最も簡単な定義である. この概念は, 1906年, マックス・プランク (Max Planck) により導入された.

*momenergy*と呼ばれることもあるエネルギー・運動量4元ベクトルは, 4元速度のように, 粒子の世界線の接線である. この関係は, Figure 47のように示され,

$$(E/c, \boldsymbol{p}) = (\gamma mc, \gamma m\boldsymbol{v}) = m(\gamma c, \gamma \boldsymbol{v}) = m(c\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}\tau) \,. \tag{59}$$

より, 定義から, 直接, 得られる. Momenergyの長さ (の2乗) , つまり, $\boldsymbol{PP} = \eta_{ab}P^aP^b$ は, 4元ベクトルの長さの2乗同様, すべての観測者にとって同じ値になる. つまり,

$$E^2/c^2 - p^2 = c^2m^2 \,, \tag{60}$$

で, 上記のことを示している. すでに, 述べたように, 運動エネルギー $T = E - E_0$ が, 静止エネルギー $E_0 = c^2m$ に比べて無視できないなら, エネルギーや状況は

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

相対論的であるという．運動エネルギーが静止質量に比べて極めて大きい粒子を超相対論的粒子という．加速器内の粒子や宇宙線はこの範疇に属する．これ
Challenge 100 s らの粒子のエネルギー・運動量の関係はどうなるか?

このように，ガリレイ物理のエネルギー保存，運動量保存そして質量保存は，相対論でmomenergyの保存と言う形に統合される:

▷ 自然界では，エネルギー・運動量，つまり，momenergyが保存される．

特筆すべきは，質量はもはや保存量ではない．

ガリレイ物理とは違い，相対論では，エネルギーの絶対ゼロを暗に意味している．静止している質量 m の系からは，c^2m のエネルギーを取り出すことはできない．とくに，ポテンシャルエネルギーのゼロ値はこのように固定される．つまり，相対論では，エネルギーには，下の境界が存在する．自然界では，無限のエネルギーを利用することはできない．

すべてのガリレイエネルギーが質量に寄与しているわけではない．例えば，外場中のポテンシャルは違う．相対論においてはじめてその収支勘定があう．後のために，記憶にとどめておいてほしいのは，相対論の「ポテンシャルエネルギー」は「外場のエネルギーの減少」を簡略に述べたものである．

4元運動量 P_1 と P_2 の2個の粒子に対し，$P_1P_2 = m_1E_2 = m_2E_1 = c^2\gamma_{12}m_1m_2$ が
Challenge 101 s 成り立つことを示せるか? ここで，γ_{12} は，相対速度 v_{12} によるローレンツ因子である．

静止質量に対し，「質量」m という言葉が使われることがあるので気を付けてほしい．これは積 γm を相対論的質量と呼ぶSFや高等学校の教科書の悪習慣にによるものである．物理現場の人たちは普通 (全員ではない) このような
Ref. 85 考え方をしない．アインシュタインもそうである． 彼らは，また時々耳にする「(相対論的) 質量は速度とともに増加する」という表現も受け入れない．相対論的質量とエネルギーは，同じ概念を別の言葉で表現したものである．このような表現は三文新聞の言い方である．

4元力– そして力学の性質

4元力 $\boldsymbol{K}$ は，4元運動量$\boldsymbol{P}$を用いて，

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}\tau = m\boldsymbol{B}\,, \tag{61}$$

のように定義される．ここで，$\boldsymbol{B}$ は4元加速度である．したがって，力は相対論でも，質量を加速度倍したものである．$\boldsymbol{K}$ の定義から，3元力 $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = m\mathrm{d}(\gamma\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t$ を用いた関係式を導出できる．つまり，*

$$\boldsymbol{K} = (K^0, K^i) = \left(\gamma^4\frac{m\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}}{c}, \gamma^2 m a_i + \gamma^4 v_i\frac{m\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}}{c^2}\right) = \left(\frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\gamma\frac{\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}}{c}, \gamma\boldsymbol{F}\right)\,. \tag{62}$$

4元力も，4元加速度同様，4元速度と直交する．4元力の第0成分の意味は，簡
Challenge 102 e 単に理解できる． つまり，物体を加速するために必要な仕事率である．実際，$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = c^2\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau = \gamma^2(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t - \boldsymbol{F}\boldsymbol{v})$ となる．これは，系の内部エネルギーの固有増

* 三元力を $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}\tau$ で定義することがある．この場合は，$\boldsymbol{K}$ が少し異なった形になる．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

加率である. この積 KU は静止質量が保存される力に対してはゼロになる. 多体粒子の衝突では反応が生じ, このような種類の力にはならない. このような衝突や力は静止質量を保存しない. しかし, 日常生活では, 静止質量が保存するので, 仕事率のガリレイ的表現は $\boldsymbol{F}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ になる.

Challenge 103 s 静止質量保存力に対しては, $\boldsymbol{F} = \gamma m\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{F}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}/c^2$ となる. つまり, 一般に, 3元力と3元加速度は, 互いに, 平行でもないし, 比例もしない. それに比べ, 3元運動量は3元速度に対し平行だが, 比例しない.

3元力は 共動座標において, 3元力は最も大きな値, つまり, 固有力になる. ブーストに対し, 力のブースト方向成分は変わらず, その垂直方向成分は減少する. Challenge 104 e 特に, ブーストを行っても, 3元力を, 無限に増加させることはできない. (ブーストにより4元力はその値を無限に大きくできるように見える.) この状況は, Page 73 変換のされかたは違うが, 3元加速度の状況と似ている.

4元力は, 仕事率–力ともよばれる. ガリレイ力学では, 力を定義する際には, ポテンシャルも考察した. しかし, 特殊相対論ではそう簡単にはゆかない. 相互作用とポテンシャルが大体望み通りの振る舞いをするガリレイ力学と違い, 相対論ではこれらに対し厳密な条件が存在する. Ref. 87 すべての観測者にとって意味のあるポテンシャルや相互作用を定義する方法がない. nointeraction ただあるとすれば, ポテンシャルをエネルギーと運動量を運べる場と関連付けることだけである. 言い換えると,

▷ 相対論で可能なのは輻射に関連するポテンシャルだけである.

実際, 相対論により許される日常生活のポテンシャルは2種類である. つまり, 電磁気力と重力によるものである. (微視的領域では2種類の核相互作用も可能である.) 特に, 日常生活における, 2つの物体の衝突では, 重力または電気的効果による衝突のいずれかであることを意味している. もう少し, 有体に言えば, 相対論は「純粋力学的な」相互作用は許さない. 力学は自然の基本的な部分ではない. 実際, 量子論の所で, 日常生活で力学的と呼んでいるものは例外なく電磁気的なものであることを述べる. やさしくなでること もキスも電磁過程なのである. 別の言い方をすれば, 光は電磁過程であるという事実をもちいると, 任意の2つの物体が互いに激しくぶつけると, 必ず, 光を生じているのである.

重力を相対論に含めようとすると, 一般相対論が出来上がる. 一般相対論では 今, 定義したばかりの仕事率–力 ベクトルが重要な役目を果たす. 自然界の3元力 $\boldsymbol{F}$ と3元仕事率 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}$ の強度には上限値があることがわかるであろう. Challenge 105 d どうすればそう言えるか考えてみてください.

相対論における回転

夜に, 星をみながら, 自分の体の軸を中心に回転すると, 星は光速より速く運動する. 大部分の星は質量であって像ではない. この速度は光速によって制限を受けるはずである. このことをどうやって特殊相対論と整合をとるか.

この例は, 上限速度がどういうものなのかをはっきりさせるもう一つの方である. 物理的にいえば, 空を回転させても光速を超えるようなエネルギー輸送を可能にしたわけではなく, 従って, 上限速度の概念と矛盾するものではない. 数学的に言えば, Figure 48の左側の図に示すように, 互いに近づく2つの物体間の相対速度のみが光速により制限される. 私たちと星のように, 物体間の距離

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

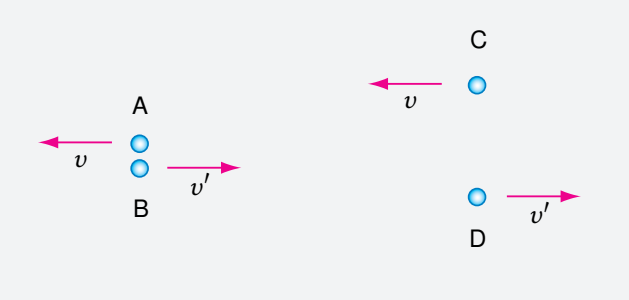


FIGURE 48 相対速度の定義について (本文参照)

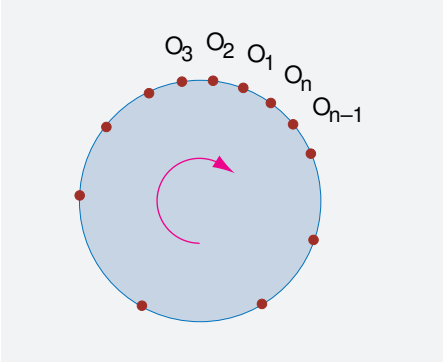


FIGURE 49 回転物体の観測者

が離れている時の速度を比較できるのは，すべての速度が時間的に一定の場合のみである．私たちが回転している時は，そういう場合には当てはまらない．ローレンツ変換の微分形を見れば，このことが，特にはっきりする．実際，物体が離れている場合，相対速度が光速より速くなることがある．以前，トンネル内の自動車について考えた時に例示したのが，このケースである．このような例をもう少しあげてみよう．

Page 54
Page 91

このことをはっきりさせるために，相対論における回転を簡単に考えてみる．最初の疑問は，座標系が回転している時に，長さと時間がどう変わるかである．回転している座標系の観測者にとって，回転物体の半径は，非回転の座標系の観測者と同じになるかということである．両者とも，たとえ，物体が剛体であっても，回転物体の円周は，回転開始前の円周とは異なる． 大雑把に言えば，回転観測者にとって，π の値が変わる．回転観測者にとって，円周cと半径rの比は$c/r = 2\pi\gamma$となり，回転速度とともに大きくなる． この直観に反する結果は，エーレンフェストのパラドクスと呼ばれることがある．このことは，回転する観測者にとっての時空は，特殊相対論の平坦なミンコフスキー時空ではないことを意味している．このパラドクスは，また，剛体が存在しないことも意味する．

Challenge 106 e
Challenge 107 e
Ref. 88

回転する物体はいろんな点で奇妙にふるまう．たとえば，Figure 49に示すように，回転する円上に固定された複数の時計の時刻を合わせようとすると，，困ったことになる．位置 O_2 にある時計を O_1 にある時計に合わせることから始めて，これをくりかえす．最後の O_n まで続けると，最後の時計は最初の時計と時刻が合っていないことに気付く．この結果は先ほど述べた円周内の変化によるものである．実際，注意深く調べてみると，長さと時間間隔の測定より，

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

すべての観測者 O_k は，自分が平坦でない回転する時空にいると結論付ける．従って，この回転円板は，空間曲率とその効果が中心話題になる一般相対論の導入に使える．一般相対論については次章で扱う．

Ref. 23 相対論では，回転と並進を変わった形で結合させる．静止観測者が，軸の周りを一様に回転している と見ている円柱があるとする．マックス・フォン．ラウエ (Max von Laue) が議論したように，回転軸とともに 動いている観測者にとっては，この円柱はねじれているだろう．これを確認できるか．

Challenge 108 e

鉄道愛好家の間ではよく知られている謎を紹介しよう．円形の軌道上を列車が走っている．列車は円形軌道と同じ長さであるとすると，列車は円を形成する．この列車が相対論的速度で走るどうなるだろう．脱線するだろうか，それとも，軌道内にとどまることができるだろうか?

Challenge 109 s

角速度に上限はあるのだろうか．答えはイエス．慣性座標系の接線速度は光速度を超えることはできない．角速度の上限は問題となる物体のサイズに依存する．これはきちんとした設問である．非常に高速で回転している物体を見ることはできるか?

Challenge 110 s

4元角運動量は次のようになるだろう．

$$l^{ab} = x^a p^b - x^b p^a \,. \tag{63}$$

添字が2つあることから，4元運動量は，ベクトルではなく，テンソルであることを意味している．特殊相対論でも角運動量は保存される． 慣性モーメントは，当然，角速度と角運動量の間の比例因子として定義される．ところで，見ることのできないような微視的粒子が回転しているかどうかを決定するのにどうしたらいいだろうか?

Challenge 111 e

Challenge 112 s

回転する粒子にとって，回転エネルギーは静止質量の一部である．地球と太陽の運動において，その割合がどの位かを計算してみてください． それは大きくないことがわかるだろう．

Challenge 113 e

ここで，相対論的回転についてわからないことでてくる．速度は相対的なものであり，測定値は観測者により異なる．角速度についてはどうなのだろうか? 相対論的回転エネルギーの式や4元角運動量との関係はどうなるのだろうか?

Challenge 114 s

また，回転は回転ドップラー効果を引き起こす．これを観測するのは，かなり巧妙な手法が必要だが，今日，精密レーザー実験施設で普通に行わえるようになってきている．そのためには，多くの実験室で利用されている円偏光レーザーが必要になる．このような光ビームが偏光可能な回転面で反射されると，光のある割合だけ，反射ビームの周波数がシフトする．この回転ドップラー効果は，回転面の回転周波数により与えられる．この効果は，ファラデー効果の理論では重要で，さまざまな光学素子の回転の，ひいては分子の回転の測定に利用されている．将来，遠く離れたり，繊細な回転物体の回転速度測定をするため，天文学や工学分野で有用になるかもしれない．

波動運動

Vol. I, page ?? ガリレイ物理では，調和波，または正弦波は，角周波数 $\omega = 2\pi\nu$ と波数ベクトル $\boldsymbol{k}$, $k = 2\pi/\lambda$ で記述される．特殊相対論では，普通，この2つの量は4元波数ベ

Vol. I, page ??

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

クトル $\boldsymbol{L}$ として，つぎのように，まとめられる．

$$L^a = \left(\frac{\omega}{c}, \boldsymbol{k}\right) . \tag{64}$$

調和波の位相速度は $\omega/k = \lambda\nu$ である．光の波数4元ベクトルの強度はゼロ，つまり，ヌルベクトルである．音波のような，ゆっくりとした波の波数4元ベクトルは時間的である．

Challenge 116 e

波の位相 φ は，

$$\varphi = L_a x^a = L^a x_a . \tag{65}$$

のように定義される．期待通りスカラーなので，波の位相は，それが光であろうと，音であろうと，すべての観測者にとって同じである．つまり，位相は相対論的不変量である．*

Challenge 117 e

4元速度 $\boldsymbol{U}$ の観測者が，今，波数4元ベクトル $\boldsymbol{L}$ の波が周波数 ν である観測したとする．この時，

$$\nu = \boldsymbol{LU} \tag{66}$$

であることを示せ．

Challenge 118 s

おもしろいことに，波の位相4元速度 ω/k は，$\omega/k = c$ の場合を除いて，粒子の速度とは異なった変換をする．波動運動の収差の公式も，$\omega/k = c$ の場合を除いて，粒子の公式とは異なる．2つの関係式を見出せるか?

Ref. 22

Challenge 119 ny

自由粒子の作用 – 物はどう動くのか

自由粒子の相対論的運動を最小作用の原理で記述しようとすると，作用の定義が必要である．物理的な作用とは，系に起きる変化を表すものであることを知っている．結論としては，自由粒子の作用は経過固有時間に比例する．エネルギーに時間を乗じた作用の次元，つまり，Jsにするためには，自由粒子の作用は

$$S = -c^2 m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}\tau , \tag{67}$$

となることが想像できる．ここで τ は経路に沿った固有時間である．この式は，実際，正しい表現になっている．

Indeed, in nature,

▷ すべての粒子は，経過固有時間 – つまり自分の腕時計–が極値を持つように運動する．

言い換えれれば，自然界では，できるだけ変化が少ないように変わる．自然は老いた賢者ようだ．動きはできるだけゆっくりと，無駄な動きはしない．自然界では，どんなものも，一番効率的な動きをすると言ってもいい．また，前に述べたように，バートランド・ラッセル (Bertrand Russell) はこれを*'law' of cosmic laziness*と呼んだ．

Vol. I, page ??

* 重要な関係式を，成分表示すると，$(\omega/c, \mathbf{k})(ct, \mathbf{x}) = \varphi$，$(\omega/c, \mathbf{k})(c, \mathbf{v}_{\text{phase}}) = 0$そし

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

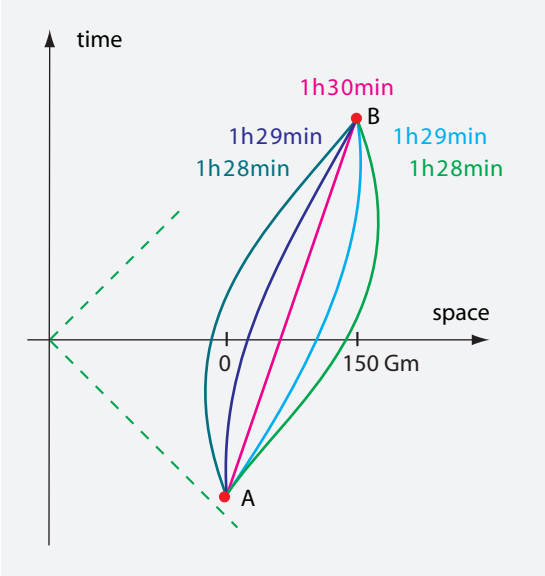


FIGURE 50 2点AとB間の直線運動は もっとも固有時間が長くかかる運動である.

光速不変性を用いると, 最小作用の原理は次のように言い換えられる:

▷ 物体はできるだけ楽な動きをする.

Figure 50 は, 自由空間の一点から別の点へ動く物体の固有時間値を示した図である. 自然はこの中で直線を選ぶが, これは最も長い固有時間が必要な運動である. (前に述べた結果を思い出してほしい. 多く旅することが若さを保つ.) しかし, この差は, この図で示すような相対論的速度で, 長い距離を旅する時にのみ問題となり, 非相対論的生活である日常ではこんなことは経験しない.

Page 44

自由物体に対しては, 一定速度で直線運動すると固有時間の差が最大になり, 作用が最小になる. 最小作用の原理には (相対論的) エネルギーと運動量の保存が暗に含まれている. これを確認できるか.

Challenge 120 e

作用についての式 (67) はマックス・プランク (Max Planck) によるものである. 1906年, これを詳細に調べ, ボルツマン定数 k とともに, 作用に対する作用量子 $\hbar$ は相対論的に不変な量であることを示した. 彼がどうやって示したか想像できるか?

Challenge 121 s

もしかしたら, 怖気づくかもしれないが, この作用はもっと複雑な形に書ける. ただ, これらの等価な記述方法を示しておくことは, 特に, 一般相対論の準備として適切である. :

$$S = \int L\,\mathrm{d}t = -c^2 m \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}t = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{u_a u^a}\,\mathrm{d}\tau = -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\eta^{ab} \frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x_b}{\mathrm{d}s}}\,\mathrm{d}s\,, \quad (68)$$

ここで, s は τ の任意の単調増加関数で, τ 自身であってもよい. 普通, 特殊相

て$(\mathrm{d}\omega/c, \mathbf{dk})(c, \mathbf{v}_{\mathrm{group}}) = 0$.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

対論の計量 $\eta^{\alpha\beta}$ は

$$\eta^{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{69}$$

である. 普通の方法で, 運動方程式を導出すると, 作用の式 (68) を簡単に確認することができる.

Challenge 122 e

つまるところ, 自然はせっかちではないのだ. つまり, どんな物体でも, 自分の時計の読みが, 近傍の他の運動と比べて, できるだけ, 遅れが最長になるように運動する. この一般原理は, 後の一般相対論の節で述べるが, 重力影響下や電磁相互作用下のの粒子についても成り立つ. 実際, 最大固有時間の原理, つまり, 最小作用の原理は, 自然界で見られるすべての場合について成り立つ. 当面は, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの平均の差が最小になる時に最大固有時間が実現されるとだけ述べておくにとどめる. (確認できるか.) さて, 日常現象に対する最小作用の原理の式に戻ろう.

Challenge 123 e

Vol. I, page ??

さきほど, 作用とは, 系の内部で進行する変化を測るものであることを述べた. 特殊相対論では, 自然は固有時間を最大にすることで変化を最小にしている. 自然界においては, 固有時間がいつも最大になる. つまり, あらゆるものの運動経路は老化最大遅延の原理により決まる. . なぜ, 「老化最大遅延」と「cosmic laziness」が同じことになるのか説明できるか.

Challenge 124 e

石を投げると, 石は放物線運動をする. 高く上がる場合には, 速く動かないといけない. つまり, 老化が遅くなる. 一方, 低い場合には, 老化はもっとゆっくりになる. 以前い説明したように, 高度が低いほど, 若さが保てるからである. このように, 実際の軌道は, 老化が最も遅れるような径路になる.

Page 138

自然界はハリウッド映画の正反対にある. 自然は, 出来るだけ節約をするように変化する. すべての運動は, 最小のアクション (作用) を実現する. この結果のさらに深い意味は自分で調べてください. お楽しみに.

共形変換

特殊相対論において, 時間と空間の区別は慣性観測者によって違う. その一方で, ある点の光円錐の位置, 形状, 方向はどの慣性観測者にとっても同じになる. このように, 相対論では, 光円錐は基本的な物理「対象」である. 相対論の専門家にとって, 時空とは光円錐の大規模な集合体である. 光円錐が重要だとすると, 次に生じる疑問は, 光円錐が同じになるのは慣性観測者だけなのかである. これについては, 他の観測者も同様であることがだんだんわかってくる.

光円錐が同じになる他の観測者の第1のグループは, 測定の単位として, すべての時間と長さの間隔をスケール因子 λ 倍したものを使用している観測者である. これらの観測者間の変換, つまり, 視点の変換は

$$x_a \mapsto \lambda x_a \tag{70}$$

で与えられ, 拡大とかスケール変換とよばれる.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

第2のグループは, いわゆる特殊共形変換をしてみるとわかる. これは, 反転

$$x_a \mapsto \frac{x_a}{x^2} \tag{71}$$

と, 4元ベクトル b_a の並進, つまり,

$$x_a \mapsto x_a + b_a \,, \tag{72}$$

を合わせて行ったものを, さらに反転させたものである. つまり, 特殊共形変換は

Challenge 125 e

$$x_a \mapsto \frac{x_a + b_a x^2}{1 + 2b_a x^a + b^2 x^2} \,. \tag{73}$$

となる. この変換が 共形と呼ばれる理由は, (無限に) 小さい図形の角度を変えないからである. 自分でチェックして見てください. 従って, この変換では (無限に小さい対象の) 形式を不変に保つ. 例えば, この変換で, 無限小円は無限小円に, 無限小 (超) 球面は無限小 (超) 球面に変換される. この変換が特殊と呼ばれるのは, 一般の共変群では, スケール変換と非斉次ローレンツ変換も含まれるからである. *

Challenge 126 e

特殊共形変換が光円錐をどのようにして不変に保っているかを調べるのはやっかいである. 調べてみてください.

Challenge 128 e

スケール変換は時間平行移動と交換しないので, この対称性に関する保存量は存在しない. (同様のことがローレンツブーストについても言える.) それに対し, 回転や空間平行移動は時間平行移動と交換するので, 保存量となる.

まとめると, 先述したように, 特別な意味で, 真空は共形不変であり, 従って, スケール変換不変でもある. つまり, スケール因子が定まっていないので, 真空だけでは, 長さを定義するのに不十分である. 定義するには, 物質が必要である. 実際, (特殊) 共形変換は物質が含まれていると対称ではない. 真空は共形的に不変であっても, 自然は全体としてはそうではないのだ. **

しかし, 共形不変, つまり, 光円錐の不変性は, 速度測定可能性の十分条件に

Challenge 127 e

* すべての特殊共形変換の集合は4つのパラメータを持つ群をつくる. 一般の共形群では, スケール変換と非斉次ローレンツ変換が追加され, パラメータは15になる. 数学的に言えば, 共形群は, 局所的に, SU(2,2)や単純群SO(4,2)に同型である. これらについては, 後に説明する. これは, 4次元時空に対してのみ成り立つ. 別の重要な場合である2次元では, 共形群は, 任意の解析座標変換に同型になり, 従って, 無限次元になる.

Vol. V, page ??

** 物質を持っている場は共形的に不変になりえない. 従って, 共形不変であっても, 厳密には自然の対称性を意味しない. ラグランジアン密度の質量項 $m\varphi^2$ は共形的に不変でないことを示せるか.

Challenge 129 e

共形群は特殊相対論の力学だけで現れるのではない. 共形群が対称なのは真空だけではなく, 関与する輻射ボゾンが光子のようにゼロ質量でありさえすれば, 電磁場のような物理相互作用でも対称群になる. 単純に言えば, 真空も質量を持たない粒子からなるすべての輻射場も共形不変である. 質量を持つ粒子により場は共形不変でなくなるのである.

もう少し, 話を進めると, 今まで発見されている素粒子はすべて質量を持っているが, プランク質量 $\sqrt{\hbar c/G}$ と比べると何桁も小さい. 従って, これらの粒子はほとんど質量がないと言ってもよい. つまり. 共形対称性は近似的に自然の持つ対称性を現していると言える. この観点から, すべての質量を持つ粒子は, 質量のない, 共形的に不変な状態に小さな修正を加えればよい, つまり, 摂動と考えてよい. 従って, 基礎理論の構築に当たっては, 共変的に不変なラグランジアンが, 出発点としてよい近似であると仮定して進められることがよくある.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

FIGURE 51 この動画は，砂漠の道を相対論的速度に到達するまで加速してゆく観測者を示している．差し込み図には道路上の位置も表示している．運動がすすんでゆくにつれ，周りのすべてが後退し行くのがわかる．(QuickTime film © Anthony SearleおよびAustralian National University, www.anu.edu.au/Physics/Savage/TEE)

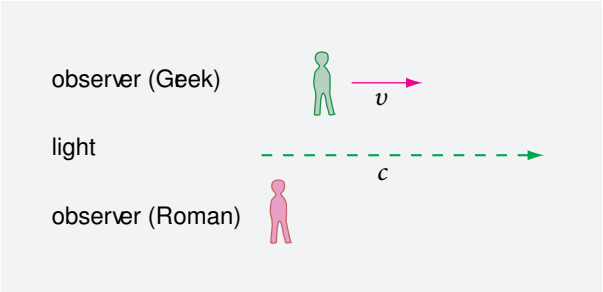


FIGURE 52 慣性観測者と加速観測者をあらわす図

なる．また共形不変は，速度測定の必要条件でもある．このことをチェックできるか．

Challenge 130 e

今まで見てきたように，共変不変性は反転対称性，真空の大きなスケールと小さなスケールが関連していることを意味している．このことは，光速不変性が反転対称性 の存在と関連があることを示唆している．この不思議な結びつきが，モーションマウンテン登山の最後に出会う冒険談の最初のきらめきなのである．

加速観測者

これまで，慣性観測者または自由運動している観測者が，同じひとつの現象を見て互いにどう言うかをついて調べてきた．例えば，運動している時計はゆっくり時を刻むことを見てきた．一人または二人の観測者が加速している時，この話はもっとおもしろくなる．

特殊相対論は加速している観測者の記述には使えないと時々聞くが，これは誤りであり，また，ガリレイ物理は加速している観測者に対しては使用できないというのも同様に誤っている．特殊相対論に対しては，平坦でない曲がった時空に対しては使用できないと言う制限があるだけだ．平坦な時空で加速する系もある．この場合は特殊相対論で議論できる．

取っ掛かりとして，ギリシア人の加速観測者が，ローマ人の慣性観測者に対しどう言うか，また，ローマ人の慣性観測者がギリシア人の加速観測者に対しどう言うかを考えてみよう． ギリシア人は，Figure 52に示すように，慣性ロー

Ref. 89

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

マ人に対し $\boldsymbol{x}(t)$ の径路で運動しているとする．一般に，ギリシア人–ローマ人の時計の進み具合の比は $\Delta\tau/\Delta t = (\tau_2 - \tau_1)/(t_2 - t_1)$ で与えられる．ここで，ギリシア文字の座標は簡単な方法で作り出せる．つまり，$t = t_1$ と $t = t_2$ で定義される事象を選び，これらの組がギリシア人観測者の時間軸と横切る点を τ_1 と τ_2 と すればよい．*

まずは，ギリシア人の観測者も慣性観測者で，ローマ人観測者の観測では速度 v で動いているとする．この時，ギリシア人の時計の進み具合の比は，もう見慣れた公式

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{\gamma_v} , \tag{74}$$

Challenge 131 e で与えられる．慣性的に動く時計はゆっくり時を刻む．

ギリシア人観測者が加速度運動をしている時は，上記の原因を少し変える必要がある． Ref. 89 ギリシア人の時計の進み具合/ローマ人の時計の進み具合は $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t$ で，τ と $\tau + \mathrm{d}\tau$ は，時刻 t と $t + \mathrm{d}t$ と同じように計算できる．これを行うには，ローマ人の測定する径路 $\boldsymbol{x}(t)$ 上をギリシア人は運動すると仮定する．これより，直接，

$$\frac{\tau}{\gamma_v} = t - \boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{v}(t)/c^2 \tag{75}$$

，すなわち，

$$\frac{\tau + \mathrm{d}\tau}{\gamma_v} = (t + \mathrm{d}t) - [\boldsymbol{x}(t) + \mathrm{d}t\boldsymbol{v}(t)][\boldsymbol{v}(t) + \mathrm{d}t\boldsymbol{a}(t)]/c^2 . \tag{76}$$

となることがわかる．1次のオーダーまで考えると，

$$\text{‘}\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t\text{’} = \gamma_v(1 - \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}/c^2 - \boldsymbol{x}\boldsymbol{a}/c^2) . \tag{77}$$

となる．この結果は，その位置 $\boldsymbol{x}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ の符号により，加速される時計の進み具合は速くも遅くもなる．上式で，括弧でくくったのは，ギリシア人観測者は，

$$\text{‘}\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau\text{’} = \gamma_v , \tag{78}$$

と主張すると，わかっているからで，この式は式 (77).の逆ではない．この差は，原点に向かい一定加速度 g で運動する時計と慣性的動くと時計が同じ速度という単純なケースを考えれば明らかである． Ref. 89 この時，

$$\text{‘}\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t\text{’} = 1 + gx/c^2 \tag{79}$$

と

$$\text{‘}\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau\text{’} = 1 . \tag{80}$$

Page 91 の になる．この状況についてもう少し詳しく議論するが，その前に，加速度の概念についてはっきりさせておく必要がある．

* これらの集合は，数学者が超平面と呼んでいるものを作る．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

FIGURE 53 市街地の道を加速して通り抜ける観測者. このムービーは観測者周辺の 360° を示している. 境界は観測者背面の状況を示しており, 事象の地平線近くにある家は距離も大きさもかわらない. (Mpg film © Anthony Searle and Australian National University)

座標系の加速

私たちは慣性座標系に生きているかどうかをチェックするにはどうすればいいのだろうか. まずは, 言葉の定義から始める. 慣性座標系を定義する性質は2つある. 1つは, ものさしで測定される長さと距離はユークリッド幾何学で記述されることである. つまり, ものさしの振る舞いは現在私たちが住む世界のものと同じである. 特に, ある点から別の点までの距離を測るのに, ものさし (棒) を何回その区間に置いたかで決める方法, いわゆる ロッド距離が, 普通の我々の世界での距離である. 次に, 慣性系では光速が一定である. つまり, このような座標系の2名の観測者は, 時間や場所に関係なく次の観測結果を得る；2点間のロッド距離の2倍と光がその2点間を往復する時間の割合 c がいつも同じである.

言い換えれば, 慣性系では, いつでもすべての時計が同時刻化されており, その幾何学がユークリッドである. 特に, ある慣性系で, 固定座標にいるすべての観測者は, お互いに静止している. この後者の条件はもっと一般的なものである. ところが, この状況であっても, 非慣性状態になるときもある.

非慣性系, つまり, 加速系の概念は特殊相対論にとって有用である. 実際に私たちが住んでいるのはこのような非慣性系の世界だ. このような加速系でも, 運動を記述するのに特殊相対論が使える. これは, この旅の始めに運動を記述するのにガリレイ物理を使ったのと同じことだ.

一般に, 座標系とは, 連続した観測者の集まりで, 観測者同士が静止しているものをいう. ここで, 「観測者同士が静止している」とは, ある観測者から, 別の観測者に光信号を送り, 再び戻ってくるまで時間が一定であることを意味し, このことは, 二人の間のロッド距離が一定であることと同じである. したがって, 座標系は観測者の剛体的集合と言うこともできる. 一般的な座標系は, 座標の一般集合と同じではない. つまり, 座標は, 必ずしも 剛体でなくてもいい. 剛体的に結合された観測者の座標が固定されているなら, 剛体座標系と言える. 加速座標系の記述では, この座標系が重要になる. *

Ref. 90

Ref. 91

* 慣性系以外の剛体座標系は2種類しかない.

— 任意だが, 原点が一定の加速度運動をする座標系 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2(1 + g_k x_k/c^2)^2$. ここで, 加速度は $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{g}(1 + \boldsymbol{g}x/c^2)$ で表される.

— 一様回転座標系 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\omega(-y\,dx + x\,dy)dt - (1 - r^2\omega^2/c^2)dt$. ここで, z 軸が回転軸で, $r^2 = x^2 + y^2$.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

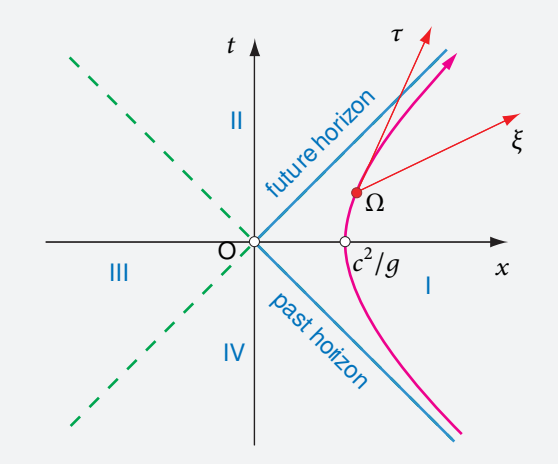


FIGURE 54 加速度gで, 一様にかつ直線的に加速する観測者Ωの双曲線運動

Ref. 90 注意してほしいのは, 今, ある 慣性系から見て, 2人の観測者が速度 $\boldsymbol{v}$ で動いていたとしたら, この速度が 一定の時だけ, この2人の観測者は互いに静止 Challenge 132 e していると観測する. ところが, 以前に述べたように, 2人の人が, 互いに, 一 Page 48 定の距離をあけてロープでつながれていて, 2人がまったく同じように, 一緒に, 相対論的速度まで加速されると, ロープは切れ, 相対論的速度から減速してゆくとロープはたるんでしまうことが, ここでも, 起きる. 相対論で加速を考えるときは注意が必要だ.

Page 60 特殊相対論では, 質量の定義式に加速度がどのように入るか説明できるか? Challenge 133 ny

一定加速度

加速というのは厄介な話題だ. いつも, 同じ力を体に感じる観測者は 一様に加速されているという. この観測者の固有加速度は一定である. もっと正確には, 一様に加速している 観測者とは, その観測者が各瞬間ごとに静止している慣性系で測定される加速が, いつも, 同じ値 $\boldsymbol{B}$ になるような観測者である. ただ, 一様な加速とは, 同じ慣性系でずっと観測していると一様に加速されていないことに注意することが重要である. これが, ガリレイ力学との重要な違いである.

先ほど定義した意味において, 一様加速度運動に対しては, 4元ジャーク はゼロになり,

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} = -g^2 \,, \tag{81}$$

Ref. 92 でなければならない. ここで, g は t に依存しない定数である. 最も簡単な例は, 一様に加速される直線的な運動である. この場合, 加速 $\boldsymbol{a}$ は, 時間のある瞬間に $\boldsymbol{v}$ と平行で, 従った, 他のすべての時間でも平行である. この場合, 3元ベ Challenge 134 e クトルを用いると, ,

$$\gamma^3 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} \quad \text{or} \quad \frac{\mathrm{d}\gamma \boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g} \,. \tag{82}$$

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 135 e のように書ける. 方向として x 軸について考え, $v(t)$ について解くと,

$$v = \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}} \,, \tag{83}$$

が得られる, ここで, $v(0) = 0$ を仮定した. 期待通り, 小さい時間では $v = gt$ に, 大きな時間では $v = c$ になる. 加速観測者の運動量が時間に比例して増加すると, 期待通りの結果が得られる. 積分すると, 加速観測者 , 径路

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} \,, \tag{84}$$

に沿って運動する. ここで, 式が簡単になるように, $x(0) = c^2/g$ とした. この式より, 直線的に一様加速される観測者は, Figure 54に示すように, 観測者は双曲線運動をする. 予想通り, 小さい時間では, 世界線はよく見る $x = gt^2/2 + x_0$ になり, 一方, 大きな時間では, $x = ct$ となる. このように, 運動は運動物体に対してのみ, 一様に加速され, 外部の観測者に対してはそうはならない. これも, 予想通りである.

加速されている観測者の固有時間 τ と慣性観測者の時間 t との関係は, Ref. 92, Ref. 93 $\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$ で表せる. 式 (83) の速度 $v(t)$ を用いると, *

$$t = \frac{c}{g}\sinh\frac{g\tau}{c} \quad \text{and} \quad x = \frac{c^2}{g}\cosh\frac{g\tau}{c} \tag{85}$$

となる. これは固有時間 τ と, 外部の慣性ローマ人観測者の測定する時間 t と位置 x との関係を示している. この関係は後にブラックホールを議論する時に登場する.

この公式は退屈にみえますか. あなたのオートバイを $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ で, 固有時間 τ 25年間, 加速し続けることを想像してみてください. 現在知られている宇宙の端をこえてしまうと考えられる. やってみる価値はあるのか. 残念ながら, こんなことをできるオートバイもミサイルも存在しない. 燃料タンクだけ Challenge 136 s でもとんでもなく大きなものになってしまう. このことをチェックしてみてください.

Ref. 94 * この式を導出するには, 好みの数学公式をしてください. 双曲線正弦と双曲線余弦は, それぞれ, $\sinh\ y = (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})/2$と$\cosh\ y = (\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y})/2$で定義される. また, これらは$\int \mathrm{d}y/\sqrt{y^2 + a^2} = \operatorname{arsinh} y/a = \operatorname{Arsh} y/a = \ln(y + \sqrt{y^2 + a^2})$を意味する.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

一様な，直線的な加速では，座標系は，

$$t = \left(\frac{c}{g} + \frac{\xi}{c}\right) \sinh \frac{g\tau}{c}$$
$$x = \left(\frac{c^2}{g} + \xi\right) \cosh \frac{g\tau}{c}$$
$$y = v$$
$$z = \zeta\,, \tag{86}$$

のように変換される．ここで，τ は，ギリシア人，つまり，加速座標系の時間である．また，時空間隔 $\mathrm{d}\sigma$ は，

$$\mathrm{d}\sigma^2 = (1 + g\xi/c^2)^2 c^2 \mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}\xi^2 - \mathrm{d}v^2 - \mathrm{d}\zeta^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2\,, \tag{87}$$

を満足し，$\mathrm{d}\tau = 0$ の場合，距離はピタゴラスの定理を示しており，ギリシア人の加速座標系は剛的なものになる．

Ref. 95

このたくさんの公式の次は，Figure 54に示すような単純な疑問について考えてみよう．慣性観測者ローマ人 O がギリシア人観測者 Ω を見ている．ギリシア人観測者は，式 (84) に従い，加速を続けながら，どんどん，離れてゆく．この時，ギリシア人観測者は，ローマ人観測者のことをどう言うだろうか．これまでの知識で，簡単に回答することができる．Ω は，軌道の各点で，Oは座標 $\tau = 0$ であると，言う（確認できるか．）．このことは，ギリシア人によると，ローマ人観測者までの距離は時空間隔OΩ と同じになる．つまり，式 (84) を用いて，

Challenge 137 e

Ref. 96

$$d_{\mathrm{O}\Omega} = \sqrt{\xi^2} = \sqrt{x^2 - c^2t^2} = c^2/g\,, \tag{88}$$

となる．なんと，この値は時間的に一定である．つまり，自分はローマ人観測者からいつも同じ距離の所にとどまっていると，ギリシア人観測者は言い，ローマ人の言い分と対立する．この奇妙な結果を，別のやり方で，少し，考えてみてください．後に，なぜ地球は爆発しないのかを説明するために，後に，このことをまた用いる．(これが，この結果とどのように関係しているか思いつくか？)

Challenge 138 s

事象の地平線

それでは，加速運動のある驚くべき結果について考える．これは，今，導出したばかりの結果と密接に関連している．どんな時刻 t でも，出発点 $x = x_0 = c^2/g$ から動かない物体の軌跡を，剛体的に加速する系の座標 ξ と τ で調べてみよ

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

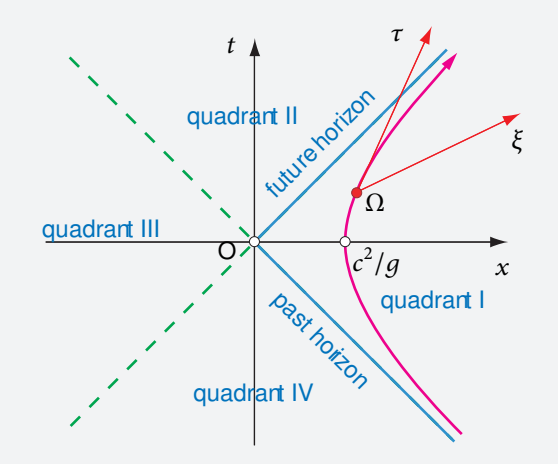


FIGURE 55 双曲線運動motionと事象の地平線

Challenge 139 ny

う．この時，二つの関係式 *

$$\xi = -\frac{c^2}{g}\left(1 - \operatorname{sech}\frac{g\tau}{c}\right)$$
$$\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\tau = -c \operatorname{sech}\frac{g\tau}{c}\tanh\frac{g\tau}{c}\,. \tag{90}$$

が得られる．これら式は奇妙である．τ が大きくなると，座標 ξ は極限値 $-c^2/g$ に近づき，$\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\tau$ はゼロに近づく．この状況は，長い道路上に立っている女性から，加速をしながら離れている自動車の乗員の場合と似ている．車の運転手にとって，女性は離れて行くが，やがて，彼女がゆっくりと地平線に近づいて行くことだけを感知することになる．日常生活において，自動車も道路上の女性も，相手側がそれぞれの地平線に近づいてゆくのを見るだけだが，相対論では，このような現象を観測するのは，加速されている観測者のみである．

状況を示すグラフは，この結果を明確にしてくれる．Figure 55において，領域IIとIIIの事象から発せられた光は，ギリシア人観測者には届かない．これらの事象は，ギリシア人観測者からは隠れた事象で，ギリシア人観測者により観測されることはない．観測できる部分と観測できない部分の境界を事象の地平線と言う．しかし，とても奇妙なことに，ギリシア人観測者から発せられた光は，領域IIに到達できる．事象の地平線は，このように，光や他の信号の一方通行の門のように振る舞う．グラフには，過去の事象の地平線も示されている．事象の地平線はひとつの表面である．普通，私たちがよく言う地平線は線あり，事象の地平線とは違う現象である．事象の地平線は，Figure 56に示すようにブラックであることを示せるか．

Challenge 140 e

そのため，一様に加速されている座標系では，慣性座標系で見えているものがすべて見えるというわけではない．加速観測者には制限がある．特に，一様に

* 上の関数，つまり，双曲正割と双曲正接は，page 87の脚注の式を用いて，

$$\operatorname{sech}\ y = \frac{1}{\cosh\ y} \quad \text{and} \quad \tanh\ y = \frac{\sinh\ y}{\cosh\ y}\,. \tag{89}$$

のように定義される．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

FIGURE 56 特殊 (一般) 相対論によると, 事象の地平線はどのように見えるか

加速されている座標系には距離 $-c^2/g$ の所に座標の地平線が存在している. 例えば, 立っている人は自分の足の下のこの距離より先は見えない.

ところで, 観測者が十分さい先のよいスタートを切れたとしたら, 双曲線運動をするこの観測者に光が追いつけないということがあるというのは本当か?

Challenge 141 s

もう1つ, 骨のある問題を出しておこう. これは一般相対論の準備となる. 一様に加速される観測者にとって, 2次元の 形をした事象の地平線はどうなるだろうか?

Challenge 142 s

Challenge 143 s さらに, 問題. 回転木馬に乗っている観測者にとって地平線はどうなるか?

地平線の重要性

特殊相対論において, 地平線は脇役に過ぎないと思っているかもしれない. しかし, これは, 二つの理由において誤っている. まず, 一般相対論では, 地平線は頻繁に登場する. 暗い夜空は地平線の例で, これこそ, ブラックホールの表面である. 宇宙には何十億個の ブラックホールが存在している. しかし, 地平線がおもしろいもう一つの理由の方がもっと重要である.

2500年前, エレアのレオキッポス (Leucippus of Elea) (*c.* 490 to *c.* 430 BCE)とアブデラのデモクリトス (Democritus of Abdera) (*c.* 460 to *c.* 356 or 370 BCE)は原子論を確立した. 特に, 彼らは自然界のあらゆるものは, 今の言葉で言うと粒子と空の空間から成ると言った. 何世紀も, 現代物理はこの言葉に従ってきた. 例えば, すべての物質は粒子から構成されていることがわかった. また, 光や他の輻射も粒子からなる. しかし, 相対論が登場し, 地平線が発見された.

地平線は原子論は誤りであることを示している. 地平線には微かな色があり, 地平線は質量, スピンや電荷を持つことをすぐに学ぶ. しかし, 地平線は広がりを持っており, 局在しているのではない. つまり, 地平線は空間でも粒子でもない何か新しいものであることがわかるだろう.

私たちの冒険の最後の2巻になってはじめて, 地平線は空間と粒子混合体であることがうまく理解できるようになるだろう. しかし, これが何を意味するのかを, いつか, きちんと見つけ出す必要がある. これまでのところ, 特殊相対論

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

が教えてくれるのは, 地平線は自然界の新しい現象で, 思いがけず, 粒子と真空に追加されたものだということだけだ.

加速は色を変える

Page 27 前に述べたように, 信号の受け手が運動している場合, 送り手と違った色を観測している. これまで, この色の偏移, つまり, ドップラー効果は慣性運動のみに限定してきた. 加速系では, この状況は奇妙なものになる. すなわち, 送り手と受け手が相対的に静止していても, この二人は色についての意見が一致しない. Ref. 92, Ref. 97 実際, 加速方向に光を発した時の, 時空間隔の公式は

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \left(1 + \frac{g_0 x}{c^2}\right)^2 c^2 \mathrm{d}t^2 \tag{91}$$

となる. ここで g_0 は観測者が $x = 0$ にいるときの固有加速度である. これより, Challenge 144 e

$$\frac{f_\mathrm{r}}{f_\mathrm{s}} = 1 - \frac{g_\mathrm{r} h}{c^2} = \frac{1}{1 + \frac{g_\mathrm{s} h}{c^2}} \tag{92}$$

を導くことができる. ここで, h は光源と受け手間の距離で, $g_\mathrm{s} = g_0/(1 + g_0 x_\mathrm{s}/c^2)$ と $g_\mathrm{r} = g_0/(1 + g_\mathrm{o} x_\mathrm{r}/c^2)$ は光源と検出器のところで測定された固有加速度である. つまり, 光が加速方向へ移動してゆくと, 光の周波数は減少する. Challenge 145 s ところで, 垂直方向に伸びた木の色はどうなるのだろうか?

よく見かける公式, つまり,

$$\frac{f_\mathrm{r}}{f_\mathrm{s}} = 1 - \frac{gh}{c^2}\,, \tag{93}$$

は第1近似に過ぎない. 加速系では, あらゆる量の意味について注意を払う必要がある. しかし, 日常の加速では, この2つの公式間の差は無視できる量である. Challenge 146 e これを 説明できるか.

光は, c より速く運動できるか

加速観測者の測定する光の速度とは何なのだろうか. 式 (93) を用いると, 加速している観測者にとって

$$v_\mathrm{light} = c\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \tag{94}$$

という式が得られる. これは観測者より「上」または上手で運動している光は c より大きくなり, 「下」または下手で運動している光は c より小さくなる. この奇妙な結果は, 加速座標系の基本性質から生じるものだ. つまり, 加速座標系では, すべての観測者が互いに静止していても, 時計は同時刻のまま保持できるわけではない. この光速についての変化予測は実験により確認されている. Page 152 一般相対論で議論される伝播の遅れはこの効果の検証とみることができる.

つまり, 光速が $c = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ で定義され, かつ, $\mathrm{d}x$ が間隔 $\mathrm{d}x$ の内部の点の所に置かれた物差しで測定され, かつ, $\mathrm{d}t$ が間隔 $\mathrm{d}t$ の間に時計を読むことで測

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

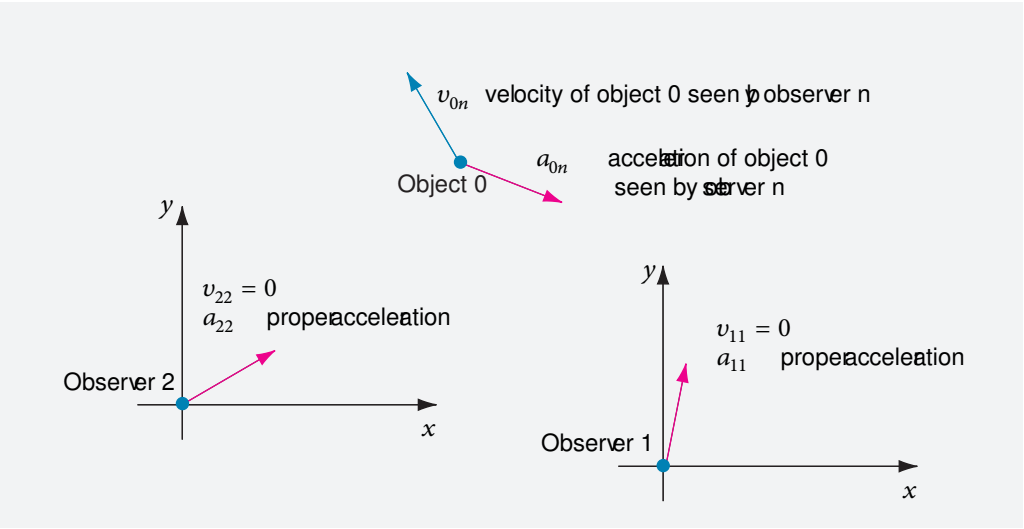


FIGURE 57 加速度合成の性質を導出するために必要な定義

定された場合にのみ，光速は不変になる．言い換えれば，光速は局所的に測定された場合にのみ，一定になる．

しかし，もし，光速が $\Delta x/\Delta t$ で定義されていたり，距離を測る物差しや，時間を測る時計が伝播する光から離れた場所にあるときには，加速観測者にとって，光速はcと異なる．これは，夜中に垂直軸の周りを回っている時に経験する効果と同じである．この観測者が観測している星の速度は，光速よりずっと大きい．つまり，

▷ c とは近くの物質にたいする光速でしかない．

ただし，この結果は，信号やエネルギーが c より速く動けることを意味しているのではない．このことは，自分でチェックしてみてください．

Challenge 147 s

実際のところ，これらの効果は，距離 l が，c^2/a よりずっと小さい時には無視できる．例えば，自由落下の加速度9.5 m/s^{2}に対しては，このサイズ効果が確認できる距離は，$9.5 \cdot 10^{12}$ km，つまり，ほぼ1光年になる．

ところで，日常生活では，重力は加速度一定としてよい．それでは，恒星のように遠くにある物体は，式 (94) に従い，なぜ，光より速くならないのか?

Challenge 148 s

加速度の合成

加速度についての感覚を深めてもらうために，別の話題として，加速度の合成定理について調べてみよう．これについては，速度より複雑で言及されないことも多い．しかし，Mishra.による本には，優れた説明がある．

Ref. 98

観測者 m から見た系 n の加速度を a_{nm} とする．物体の加速度 a_{01} を，他の観測者により測定された加速度 a_{02} ，相対加速度 a_{12} ，および，他の観測者の固有加速度a_{22}の関数として，式を求めたい．Figure 57参照．ここでは，すべての観測者，すべての物体は1つの軸に沿って運動しているとし，1次元の場合のみを考える．(明確にするため，$v_{12} = v$ および $v_{02} = u$ と書く．)

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 149 e ガリレイ物理では, 振る舞いが簡単なので, 一般的に

$$a_{01} = a_{02} - a_{12} + a_{22} \tag{95}$$

と書ける. 特殊相対論では

$$a_{01} = a_{02}\frac{(1-v^2/c^2)^{3/2}}{(1-uv/c^2)^3} - a_{12}\frac{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)^{-1/2}}{(1-uv/c^2)^2} + a_{22}\frac{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)^{3/2}}{(1-uv/c^2)^3} \tag{96}$$

Challenge 150 e となる. 式は自分で確かめてください.

固体長の限界

日常の固体のある部分が, 近くの部分に対し, その物質の音速cより速い速度で運動すると, その物質は壊れてしまう. * 例えば, ある物体が床にぶちあたり, その前面が距離 d の範囲で停止したとすると, 少なくとも,

$$\frac{v^2}{c^2} \geqslant \frac{2d}{l}\,. \tag{97}$$

の時, 物体は壊れてしまう. このように, 発泡ゴムで梱包することにより, 停止距離を稼ぎ, 壊れ物の破損を防いでいる. プレゼントの箱が中身より, 普通, 大きいのはこのためである.

さて, 壊れるかどうかの境目は次のように書くこともできる. 破損を防ぐには, 長さ l の固体の加速度 a は,

$$la < c^2\,, \tag{98}$$

でなければならない. ここで, c は, 固体物質の最大速度である音速を表す. それでは, 音速の代わりに光速をもちいて, 相対論的にこの議論をおこなってみよう. Ref. 99 固体の前面を, ある固有加速度 a で加速することを考えてみよう. 背面は, 無限大, または, それ以上の加速度 α で動くことはできない. これは, 光速より速く動くことはできないと言ってもいいかもしれない. 従って, 固体の長さlは,

$$la < c^2\,, \tag{99}$$

Challenge 151 s に従わないといけないことは簡単に確かめることができる. ここでcは光速である. これが, 光速により制限される固体のサイズ長である. 例えば, 超性能を持つオートバイの加速度が$9.8\,\mathrm{m/s^2}$であるとすると, この式より, 長さの限界値は$9.2\,\mathrm{Pm}$, つまり, 1光年程度になる. 実際のオートバイの長さはこれと比べると小さいので, このことが問題になることはない.

しかし, 他に, もっと面白い状況がある. 今日, 大きな加速度は粒子加速器内で作られる. 原子核の大きさは数フェムトメートルである. これを加速器内の Challenge 152 ny 衝突により壊そうとするとどの位のエネルギーが必要か計算できるか? 実際,

* ガラス, 鉄, スチールの (縦方向の) 音速は約$5.9\,\mathrm{km/s}$で, 金では約$4.5\,\mathrm{km/s}$, 鉛では約$2\,\mathrm{km/s}$である. Vol. I, page ?? もっと多くの音速値は, すでに調べられている.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

原子核内部の核子は, $v^2/r \approx \hbar^2/m^2r^3 \approx 10^{31}\,\mathrm{m/s^2}$ のオーダーの加速度で運動している. これは, 自然界で見つかっている最大の値の 1 つである. 長さの制限は
Challenge 153 s 原子核でも成り立つのか?

ガリレイ物理や相対論は同じ結論になることがわかる. つまり, 音であろうと光であろうと, 速度が極限値になると, 固体が剛性を保つことはできない. 物体の一方を押すと, 反対側も, 少し遅れてから動く.

問題：速度の最大値が存在するということは, 長さと加速度の不確定性について, 「相対論的」不確定性関係

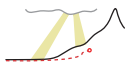
$$\Delta l \, \Delta a \geqslant c^2 \tag{100}$$

Challenge 154 s を意味するのだろうか?

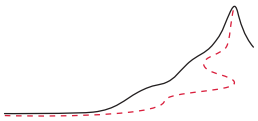
このことは素粒子の大きさに関してどういう意味をもつのだろうか. 距離 dだけ離れた2個の電子を考え, その大きさを l と呼ぶ. この時, 静電反発による加速度により, 大きさのの最大値は,
Challenge 155 ny

$$l < \frac{4\pi\varepsilon_0 c^2 d^2 m}{e^2} \,. \tag{101}$$

で与えられる. 電子が近づけば近づくほど, 小さくなる. 現在の実験から, その制限値は $10^{-19}\,\mathrm{m}$より小さいことがわかっている. 電子はまさに点粒子なのだろうか. この疑問 については, この冒険が終わるまでに何回か問い返す.



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net



Chapter 3

特殊相対論を4つのセンテンスで

これまで見てきた結論は4つのセンテンスでまとめることができる.

- 近くにいるすべての 観測者は, 一義的な最大不変のエネルギー速度, いってみれば「完全」速度 $v_{max} = c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} \approx 0.3\,\mathrm{Gm/s}$が自然界には存在することを観測する.

  最大速度を実現できるのは, 光や電波のような質量を持たない輻射で, 物質系では到達できない. この観測結果が特殊相対論を定義する.
- 従って, たとえ, 時空が, どの観測者にとって同じでも, 測定される時間 と長さの値, ひいては, 角度や色も, ローレンツ変換 (14) と (15) により記述されるように, 観測者ごとに変化する. このことは実験により確認されている.
- エネルギー速度に最大値があることにより, 質量はエネルギーと等価であって, 運動している質量物体の全エネルギーは $E = c^2\gamma m$ で, 質量は保存されないことを衝突は示している.
- これらの結果を加速物体に適用すると, 双子のパラドクス, 事象の地平線の出現や衝突時に短寿命の仮想タキオンの生成のような多くの直観に反する結果が導かれる.

Page 39

実験によると, 輻射や物質の運動には速度の上限がある. さらに, すべての速度は光の伝播を用いて定義され測定される. 日常の運動のその他の性質は維持される. 特に, 日常運動の予測可能性から6つの運動の性質が依然として成り立つ. つまり, 相対論的運動も連続で, エネルギー運動量と角運動量を保存し, 相対的で, 反転性があり, 鏡像不変で (弱い相互作用は例外だが, この場合, 鏡像反転運動がなりたつこと予言する別の方法がある), そして「怠け者」, つまり, 作用を最小にする.

Vol. I, page ??

Vol. V, page ??

光速が変わることはあるのか

質量を持たない光や輻射の速度は, 自然界のエネルギーの極限の速度である. 極限の速度は, 場所によったり , 時が過ぎると, 変化する可能性はないのだろうか. このヘンテコな質問は物理学者を馬鹿にしている. 最初の答えは, 騒々しく「そうだ, 当たり前だ. 公式の中で c の値が変わるとどうなるかを見てみろ.」 これまで, このような「変数としての光速」についていくつかの推測が研究者によってなされた. しかし, この答えは誤りだとよく耳にする.

Ref. 100

光速が時空の定義に入り込んでいるため, 光速はすべての物差し, すべての測定基準, すべての測定装置に知らず知らずのうちに含まれてしまっている. つまり, この値が変数なのかどうかを検出する方法がないのだ. 極限の速度がすべての測定の基礎になってしまっているので, 極限の速度の変化を検出する

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 156 s 実験なんて想像できないだろう. 「これはひどい話だ」と読者は言うかもしれない. 「すべての実験結果は光速不変であることを示す. 光速不変を受け入れるためには直観に反する結果をそのままうのみにするしかない. 今のところ, 他の選択肢はないと考えるしかないのか.」その通り. これが物理の進歩の皮肉な結果である. 光速が観測者に依存しないことは, 観測者に依存するガリレイ速度の日常生活と比べると, 直観に反している. しかし, 好むと好まざるとに関わらず, すべての速度測定装置が光速との比較に基づいていることを考えにいれると, 光速不変は驚くに当たらない. むしろ, 低速度の奇妙な性質の方に驚かされるだろう.

原理的に, 測定標準の不変性をチェックする方法はない. 言い換えると, 相対論が真に不思議なのはcの不変性ではなく, 普通の生活の運動公式から c が消えてしまっていることである.

どこで特殊相対論は破たんするのか

最大局所エネルギー速度の存在はすべての実験で確認されている. その速度極限値は正しい. 自然の基本となる真実である. 私たちの残りの冒険でも正当なものととして扱う.

光速に近づてゆくと, ローレンツ因子やローレンツ変換の量が無限大に近づく. しかし, 自然界で, 任意に大きな値に近づく観測量は存在しない. 例えば, (修正された) プランク極限値

$$E_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{4G}} = 9.8 \cdot 10^8 \,\text{J} = 0.60 \cdot 10^{19} \,\text{GeV}$$
$$p_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c^3}{4G}} = 3.2 \,\text{kg m/s} = 0.60 \cdot 10^{19} \,\text{GeV/c} \qquad (102)$$

に近いまたは超えるようなエネルギーや運動量を持つ素粒子は, まだ, 観測されていない. 実際, これまで観測された記録値はプランク極限値より100万倍小さい. その理由は簡単である. 光の速度に限りなく近づくと, 自然の記述として特殊相対論が破綻するからである.

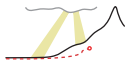
最大の速度極限値はどのくらい正しいのか, そして, それでも, 特殊相対論は破たんするのか. 最大速度においては, 特殊相対論は自然を記述するのに十分ではない. それには2つの理由がある.

極限のローレンツ短縮が起きると, 移動するエネルギー自身が作り出す時空の曲がりを考えなければいけない. すなわち, 重力を含める必要が生じる. それは, これまで, 仮定してきた点質量が自然に存在するということと同じになる. しかし, 点質量は無限の質量密度を持つことになるが, そんなことはあり得ない. 重力定数 G で特徴づけられる重力は, 後に見るように, 空間の曲がりにより無限の質量密度は許さない.

さらに, 極限のローレンツ変換では, 運動している粒子の速度と位置の揺らぎを考慮する必要が出てくる. すなわち, 量子論を含める必要がある. このことは, 自然界で無限の精度の測定が可能であることを, これまで, 仮定した. しかし, このようなケースはありえない. 最小作用値 $\hbar$ で特徴づけられる量子論では, 後に見るように, 無限大の精度の測定はあり得ない.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

実際, 対応する基本定数, つまり, 重力定数 G や作用量子 $\hbar$ の両方が, プランク極限値に姿をあらわす. これらの拡張への冒険はモーションマウンテン登山の次なる2段階である. 重力から始めよう.



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Chapter 4

一般相対論の初歩：重力, 最大速度, 最大力

一般相対論は易しい. 現在では, 万有引力や逆二乗則と同じくらい直観的になり, 中高生でも, 特殊相対論と同様に, 一般相対論の考え方に近づくことができる. とくに, ブラックホール, 重力波, 時空の曲率や宇宙の果ては, ドップラー効果や双子のパラドクスと同じくらい簡単に理解できる

これからのページでは, 特殊相対論が, 最大速度 c を基本にし, これから導かれたのと同じように,

▷ 一般相対論は, 最大運動量変化, つまり, 最大力 $c^4/4G$ – あるいは, それに等価な最大仕事率 $c^5/4G$ – を基本にし, この量から導ける

ことを発見しよう. まずは, 知られているあらゆる実験もこれらの極限値に矛盾しないことから調べる. そして, 最大力と最大仕事率 (仕事率) は超えることのできない極限表面上にのみで達成できることを見出そう.

▷ 最大力–つまり最大運動量流–と最大仕事率–つまり最大エネルギー流を実現している面を**地平線**という.

Page 88 この地平線は特殊相対論で出てきた地平線を単純に一般化したものである. なぜ, これらの最大量が地平線に関連しているかはまもなくわかる. 一般相対論の地平線は, 特殊相対論の光線の役目を果たしている. つまり, 地平線とは極限値を実現しているシステムである. 地平線のため, 夜間の空は闇となり, 宇宙のサイズは有限なのだ. 時空は一般に曲がっていることを地平線は教えてくれる. そして, 地平線を用いると, 一般相対論の場の方程式を導ける.

また, 力と仕事率の極限が存在することから生じる主要な反論やパラドクスについても議論する. これらのパラドクスの結論から, なぜ, これほど長く, この極限が実験や教育においてそっとされていたかがはっきりする.

この序章が終わってから, 相対論的重力効果について詳細に学ぶ. 日常環境において, 時空の曲がりにより光や物体の運動が受ける影響についても調べる. 例えば, 逆二乗則は修正される. (私たちが学んできたことから, なぜこれが必要か説明できるか?) Challenge 157 s もっとも興味をそそられるのが, 真空を動かし, 曲げるにはどうすればいいかを理解することである. そして, 大局的な宇宙について学ぶ. 最後に, 重力のもっとも極端な形であるブラックホールについて考える.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

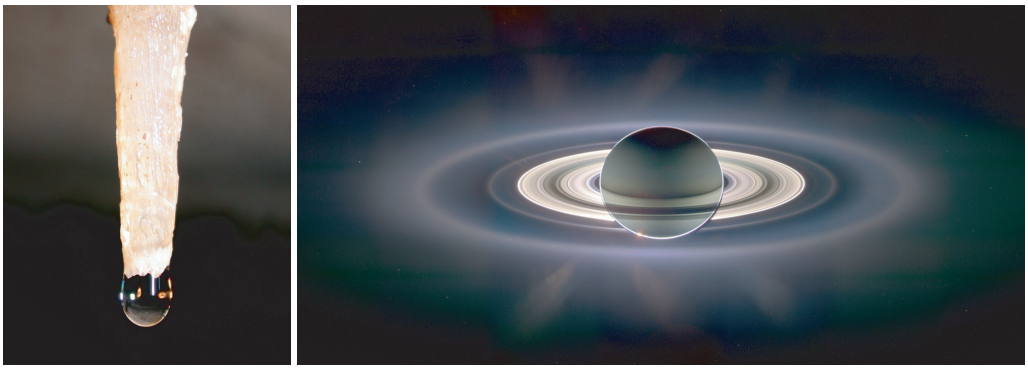


FIGURE 58 重力の効果:滴り落ちる鍾乳石 (© Richard Cindric) と太陽が惑星の陰に隠れた時に 撮影された土星のリング (courtesy CICLOPS, JPL, ESA, NASA)

最大力 – 一般相対論の1つの記述

Ref. 101

> どんな知識分野であっても,理論的研究の主目的の1つは,調べている対象が最も簡単に現れる視点を探し出すことである.
> ウィラード・ギブズ (Willard Gibbs)

自然界の極限の速度 c を認識し,この値を基本原理とみなすことで,特殊相対性理論が登場したことを述べた. 21世紀への変わり目,一般相対論に対しても同様の基本原理でアプローチできることが示された.

Ref. 102, Ref. 103

▷ 自然界には最大の力,つまり,最大の運動量変化率が存在する:

$$F \leqslant \frac{c^4}{4G} = 3.0258(4) \cdot 10^{43}\,\mathrm{N}\,. \tag{103}$$

自然界にはこの値を超える筋力,機械力,システムの力は存在しないのだ. おもしろいことに,この力の極限値は (シュヴァルツシルト) ブラックホールのエネルギーを半径の二乗で割ったものに等しい. (シュヴァルツシルト) ブラックホールはある質量に対する最も高密度な物体であることを考えれば,この極限の力を直観的に理解できるだろう. 物体を圧縮できる限界があるのなら,重力,電気力,中心力に限らず,どんな力も,どこまでも大きくはなれない.

このことを,基本原理として,別の言い方で置き換えることもできる.

▷ 自然界には最大の仕事率,つまり,最大のエネルギー変化率が存在する.

$$P \leqslant \frac{c^5}{4G} = 9.071(1) \cdot 10^{51}\,\mathrm{W}\,. \tag{104}$$

どんなランプもエンジンも爆発も,この値を超えることはできない. 最大仕事率とは,(シュヴァルツシルト) ブラックホール半径に相当する距離を光が移動する時間内に,そのブラックホールが輻射により消滅するのに必要な仕事量である. 以下で,ブラックホールが,なぜ,この極限値に関係しているのかを,詳細に調べよう.

最大力または最大仕事率が存在することから,一般相対論の理論全体を構築できる. このアプローチの正当性と有用性を示すには一連の説明が必要である.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

TABLE 3 自然界に, 最大力 $c^4/4G$ あるいは最大仕事率 $c^5/4G$ が存在することを自分や他の人に納得させるための方法. この表を 22ページの最大エネルギー表や第IV巻の ??ページの最小作用の表と比較してみてください.

主張	テスト方法
最大力 $c^4/4G$ は観測者によらず一定である.	すべての観測をチェックする.
$c^4/4G$ を越える力は観測されない.	すべての観測をチェックする.
$c^4/4G$ を越える力を作り出すことはできない.	すべての企てをチェックする.
$c^4/4G$ を越える力は想像できない.	すべてのパラドクスを解く.
最大力 $c^4/4G$ は原理である.	これより一般相対論を導出する.
	たとえ, それが奇妙なものであっても, すべての結果は観測結果により確認されていることを示す.

Page 22

その流れは, Table 3に示すように, 特殊相対論における極限の速度の決定するためのやり方と同じである. 基本は, その力の値が不変であると認めてしまうことである. これは c と G の不変性に従う. まずは, 主張される極限値に関する実験的証拠を集め, それがすべてのケースに成り立っていることを示す必要がある. 次に, その極限値を, すべての想像出来得る状態に適用させてみることで, 明らかなパラドクスは解決されないといけない. 最後に, その値を自然原理として確立させるために, 一般相対論がそこから導けることを示せなければならない.

これらの3つのステップが一般相対論への導入となっている. 極限値のもとになる考え方を説明することからから始めよう.

力と仕事率の極限値の意味

19世紀と20世紀, 多くの物理学者は力という考え方を取り除くことに心血を注いだ. ハインリッヒ・ヘルツ (Heinrich Hertz) はこれを自分の仕事の指針とし, この概念を一切使わずに古典力学の有名な教科書を書いた. この教科書を知る量子力学の創始者たちは微視的物理学のボキャブラリーから「力」という用語を無くしてしまった. 結局,「重力」の概念を「みかけの力」に変えてしまうことで, 一般相対論から除かれた. 力は時代遅れになってしまった.

ところが, 最大力の原理は, 力の定義を使って考えると, わかりやすい:

▷ 力は単位時間当たりの運動量の流れである.

自然界では, 運動量を生成させたり消滅させたりすることはできない. そのため,「流れ」という言葉を使い, 保存量である運動量を流入させたり流出させたりして変化させているにすぎない. 言い換えると,

Ref. 104

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

▷ 運動量の変化, つまり, 力は, いつも境界面を通して起きる.

このことが, 本質的に重要である. ある点での力を考えている時は, いつも, その点にある面を '流れる' 運動量を, 実は, 意味している. 一般相対論では, この考えを次のように表現する. つまり, 力は, 物体を測地線から外れさせようとする. (測地線とは自由落下粒子の示す径路である.) 測定された力の背後にあるメカニズムは重要ではない. この議論を導いてくれるしっかりとした例として, まずは, 電磁力のような力を考るのがいいだろう. もっとも, どんなタイプの力に対しても, これは可能である.

力の極限は, 3元力, すなわち, 私たちが日常生活で力と呼んでいるものに関係し, 仕事率の極限は, 私たちが日常生活において仕事率と呼んでいるものに関連していることも強調しておきたい. 言い換えると, 自然界では, 3元速度と3元力の両方に最大極限がある

最大力の原理は次のように要約できる. (観測者を並べた) 物理表面を想像した時, (これらの観測者により測定される) その表面を横切る運動量の流れの積分は極限値 $c^4/4G$ を超えることはない. 物理的な表面であるかぎり, これは表面の選び方には関係しない. ここで, 物理的な表面とは,

▷ ある表面に観測者を配置できれば, その表面は物理的である.

と言える. もちろん, 一般相対論の観測者も, 特殊相対論の観測者と同じように, 観測をしている系に与える影響は無視できるくらいの軽さの質量しかもたない物理系でなければならない.

最大力の原理のため, 筋肉, ハンマーの効果, 物質の流れ, 質量物体の加速度等々には制限が生じる. どんな系もこの極限を超える力を作ることも, 測定することも, 経験することもできない. 粒子も, 銀河も, ブルドーザーも, これを超えることはできないのだ.

力に極限が存在するとおもしろい結論が得られる. 自然界で力を測定することが可能になる. つまり, どんな測定でも標準との比較が必要だ. 力の極限は力の自然単位にすることができ, マックス・プランク (Max Planck) が c, G と $\hbar$ (または $\hbar$) から導いた自然単位系にうまく適合している. * つまり, 最大力は, あらゆる場所とあらゆる時間において有効な標準となる.

極限値 $c^4/4G$ は2つの点でプランクが提唱した単位と異なっている. まず, 数因子が違う (プランクの値は c^4/G) . 第2に, この力の単位は 極限値である. この点において, 最大力は最大速度と同じ役割を果たしている. 後述するように, この極限値の性質は, 数値因子が適切に修正されれば, 他のすべてのプランク単位にもあてはまる. 実は, 因子1/4には深い意味はない. 一般相対論の場の方程式を正しい形式にするだけの単なる数字である. また, 因子1/4は, 日常の状況で, 万有引力の逆2乗則を再現できるようにするために必要としているのである. この因子を正しく考慮すれば, 最大力 (または仕事率) は (修正された) プランクエネルギーを (修正された) プランク長またはプランク時間で割ることで得られる.

Vol. VI, page ??
Page 119

Vol. IV, page ??

* プランクが作用量子を発見した時, 彼は直ちに自然単位の定義の可能性に気付いた. ベルリンを廻る森を7歳の息子と歩きながら, 万有引力と同じくらい重要な発見をしたと, 息子に言った.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

最大力の式には光速 c と重力定数 G が含まれている. これにより, この式は相対論的重力を記述する資格が与えられているのだ. 特殊相対論の基本原理は, すべての観測者対し, 速度 v は $v \leqslant c$ でなければならないことを言っている. 同様に, 一般相対論の原理は, すべての力 F と仕事率 P は, それぞれ, $F \leqslant c^4/4G$ と $P \leqslant c^5/4G$ でなければならないことを主張している. 力や仕事率を観測する観測者が, 観測している系に対し高速で動いているとか, 自由落下中であるとか, 強く加速されているかどうかは問題ではない. ただし, あとで見るように, これには必須条件がある. すなわち, 観測者が自分がいる場所で測った値を記録していること, 観測者が実体的であること, つまり, 物質から構成されていること, そして, 観測者が地平線により系から隔離されていないことが必要である. これらは, 特殊相対論において速度を測定する観測者が従う条件と同じである.

物理で現れる仕事率とは力と速度の積であり, 自然界には速度の限界値があるので, 力に上限があることは仕事率に上限があることを意味する. すでに, Page 75 4元力の定義で力と仕事率が一緒に登場することを学んだ. 最大3元力の説明は, その強度のみならず, 3元の各成分についても成り立つ. (以下で説明するように, Page 112 大きな γ 値のブーストは力や仕事率の極限を超えさせるのに用いることはできない.) 上限仕事率は, 車やオートバイ, ランプ, レーザー, 星, 重力輻射源や銀河.といったものの出力を制限する. この値は $1.2 \cdot 10^{49}$ 馬力に等しい. 最大仕事率の原理は, この値より素早くエネルギーを移動させたり, 取り出したりすることはできないことを言っているのだ.

仕事率の極限は, どんなエンジンも, 置き去りにする物質やエネルギーとしての排出物を生成することを知っていればすぐ理解できる. ランプ, 星, 蒸発するブラックホールで放出されるのは輻射が, 車やジェットエンジンでは熱いガスが, 水タービンではタービンからゆっくりと出てゆく水が, ロケットでは後方に排出される噴射が, 光子ロケットでは電気モーターでは電磁エネルギーが排出物になる. エンジンの仕事率がこの極限値に近づくと, 排出物の質量-エネルギーが極端に増加し, これらの出力 (たとえそれが輻射だけであったとしても) からの重力による引力がエンジンのさらなる加速に歯止めをかける. 最大仕事率の原理は, 自然界における組み込みブレーキが存在するといえるだろう. このブレーキシステムが重力である.

最大仕事率を c^2 で割ると, 等価な別の極限が生じる. つまり,

▷ 自然界には最大の質量変化率が存在する:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \leqslant \frac{c^3}{4G} = 1.000\,93(1) \cdot 10^{35}\,\mathrm{kg/s}\,. \tag{105}$$

この上限はポンプ, ジェットエンジンや早飯の人に制限を加える. 実際, 管を流れる水や他の物質の流量には制限がある. この質量流の極限は力または仕事率の極限と等価である.

自然界において力, 仕事率, 質量変化に最大値が存在すると主張するのは, やや考え過ぎのように見えるかもしれない. だから, これが実験的にどうなのかをできるだけじっくりとチェックしよう.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

実験的証拠

最大速度の原理のように，まずは，最大力の原理を実験的にチェックしないといけない．マイケルソン (Michelson) は彼の研究生活の大半を光速値の変化の探索に費やした．最大力や最大仕事率のテストでは，彼ほどの努力をした人はまだいない．しかし，微視的な実験において，また，巨視的な実験，天文学上の観測において，今述べた極限値より大きな力が測定されたことはこれまでない．光速より速い速度を達成したと主張している人も多くいるが，極限値より大きな力を作り出したり，観測したという人はまだいない．

Challenge 158 s

太陽の内部，巨大な加速器内部，宇宙線による反応で生じる大きな加速度でも，極限力と比べれば，ずっと小さな力に対応するものでしかない．中性子星内の中性子，陽子中のクォーク，ブラックホールに落ちてゆくときに観測される粒子についても同様である．さらに，力の極限に到達するか，それを超える力が生じるかもしれない時空の特異点の探索も成果が出ていない．

天文学の領域についていえば，，星間力や銀河間力のようなどんな力も極限値以下であるし，その内部の力も同様である．宇宙を物理的に感知できる領域に二つに分割し，その領域間の力を考えても，極限を超えることはできない．(「物理的に感知できる領域」の意味は後で定義する．感知できない領域であれば，最大力以外の説明も構築できる．このような例外を探してみてください.)

Page 117

Challenge 159 s

力の極限値を越えることを許すほどの大きな曲率 (後述) をもつ時空も観測されていない．最近の多くのブラックホール観測でも極限値を超える力やそれに対応する半径より小さいブラックホールは見つかっていない．

仕事率の極限値を実験的に検証することも可能である．恒星，クエーサー，2重パルサー，ガンマ線バースト，銀河や銀河系の仕事率，つまり，これらの明るさは極限値の一定の割合を占めているもの，この極限を破るものは，まだ，観測されていない．実は，宇宙のすべての星の光の全出力を合わせても，この極限値にはまだ，満たないのだ．同様に，最も明るい重力波源や融合するブラックホールでも，仕事率の極限を超えることはできない．この極限に匹敵することができるものがあるとすれば，最終段階にある蒸発するブラックホールからの光だけであろう．しかし，これまでこれも見つかってはいない．(二つの局所的な光源を仕事率の極限にちかづけることができたら，いわゆる，仕事率のパラドクスが生じる．これについては，後で述べる.)

Ref. 106

Page 117

同様に，観測されている質量流についても，その極限値より数桁小さい．ブラックホールと数学的に類似な物理系，例えば，音響ブラックホールや光学ブラックホールについても，それにと対応する力や仕事率の極限値を実現できない．

Ref. 107

まとめると，実験的に実現したり，観測できる可能性は期待薄である．つまり，実験や観測結果は極限値の存在に矛盾していない．しかし，極限値の存在はまず確認できない．その理由は，日常系や実験的に利用できる系には事象の地平線がないからである．特殊相対論の基礎である最大速度は，ほとんど，どこにでも存在するが，最大力や最大仕事率はどこにもない．将来，実施できる可能性のある極限値のテスト方法については後述する．

Page 122

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

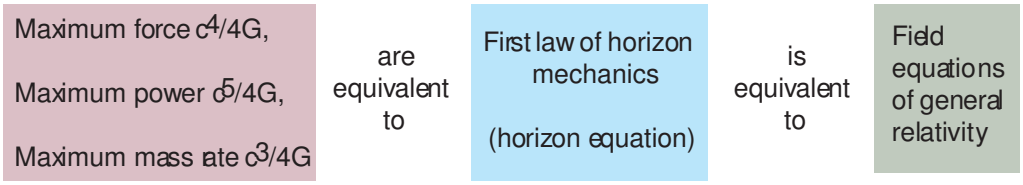


FIGURE 59 最大力または最大仕事率と一般相対論の場の方程式との等価性を示す図

一般相対論の導出*

物理基本原則として最大力や最大仕事率を確立するにはmydisc, 自然界の観測結果との一致だけでは不十分で, これが完全な一般相対論を含んでいることを示す必要がある. (この節は一般相対論の場の方程式を知っている人のためのものである. 他の読者は次節に進んでもかまわない.)

Page 108

相対論を導出するには, 極限を実現する系を調べる必要がある. 特殊相対論の場合は, 極限速度を実現する主要な系は光である. このため, 特殊相対論をしらべる時は光が中心となる. 一般相対論の場合は, 極限を実現する系はそれほど自明ではではない. まず, 最大力 (または最大仕事率) はある空間の体積全体で実現することはできない. もし, それが可能だとしたら, 単純な ブースト** により, 力 (または仕事率) をより大きな値に変換できてしまうだろう. つまり, 自然界で実現できる最大力 (または最大仕事率) はある表面上のみであって, 体積内ではできない. さらに, これらの表面には到達できないのである. 到達できない表面というのが一般相対論の基礎である. この面を地平線とよんでいる. 最大力と最大仕事率は地平線上だけに現れる. 特殊相対論でも地平線がでてきたが, この場合は観測限界の表面として定義された. (普通に使われる地平線は線であって, 面ではないことに注意してください.) 最大力 (または最大仕事率) の表面として地平線を定義するこのやり方は, この面を超えて信号を受け取ることのできない面と定義するのと等価である. いずれの定義でも, 地平線はどんな相互作用も越えることのできない面である.

Ref. 105
Page 89

地平線と最大力の関連付けが一般相対論の中核である. この関係は, 特殊相対論における光と最高速度との間の関係と同じくらい重要である. 特殊相対論では, 光速が極限の速度になるという性質を用いてローレンツ変換を導出した. 一般相対論では, 地平線力ともいえる自然界の最大力が, 一般相対論の場の方程式を含んでいることを証明する. この目的のために, まずは, どんな地平線でも, そこを横切るエネルギーの流れが存在することから始める. 後で触れるが, この流れは地平線の曲率に依存する. この関係から, 地平線が平面になりえないことがわかる. なぜなら, 無限に広がる平面は無限のエネルギー流を意味するからである.

一般相対論の方程式の導出は, Figure 59に示すように, 2つのステップに分かれる. 第1のステップは最大力または最大仕事率は地平線力学の第1の「法則」を含んでいることを示し, 次のステップで, 地平線力学の第1の「法則」は一般相対論の場の方程式を含んでいることを示す.

* この節は, 最初この本を読むひとはスキップしてもかまわない. (ここで述べる証明は2003年12月のものである.)

** 特殊相対論では, ブーストを第1の観測者に対し運動している第2の観測者への視点の切り替えとして定義している.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

最も単純な有限地平線は，静的球で，シュヴァルツシルトブラックホールに対応している．静的球は曲率半径 R，つまり，表面重力 a で特徴付けられる．すなわち，2つの量は $2aR = c^2$ の関係がある．さて，どんな地平線でも，そこを横切るエネルギー流を伝播方向に測定すると，いつも，そのエネルギー流の広がりは有限である．従って，エネルギーパルスと言うことができる．地平線を横切るパルスはどんなものであっても，エネルギー E と固有長 L であらわせる．エネルギーパルスが地平線に対し垂直に流れる時は，地平線の所の観測者にとっての運動量変化率，つまり，力は

$$F = \frac{E}{L} \,. \tag{106}$$

となる．私たちの目標は最大力の存在から一般相対論が導けることを示すことである．最大力は地平線上で実現される．従って，式 (106) の両辺に可能な最大値を代入し，それが一般相対論に従うことを示す必要がある．

最大力と球地平線の面積$4\pi R^2$を用いると，

$$\frac{c^4}{4G} = \frac{E}{LA} 4\pi R^2 \,. \tag{107}$$

となる．分数 E/A は地平線の一部の任意の面積 A を通過する面積当たりのエネルギー流である．エネルギーパルスの長さ L の上限が半径 R と考えることで，最大値を見積もれる．上限 $L \leqslant R$ は幾何学的考察から得られる．つまり，地平線の内側から見ると，パルスは曲率半径より短くなければならない．それとは別に，a で加速される物体の長さ L は特殊相対論により，$L \leqslant c^2/2a$ におさえられる．特殊相対論により，この極限値は地平線の出現に関連していることをすでに示している．関係式 (107) から，地平線が最大力の面になることを主張すると，静的な球地平線についての重要な関係式

$$E = \frac{c^2}{8\pi G} a\, A \,. \tag{108}$$

が導かれる．この地平線方程式は，球状地平線のある面積Aを流れるエネルギー流Eとその表面重力aの関係を表している．つまり，地平線を通って流れるエネルギーには上限があり，このエネルギーは地平線の面積に比例し，エネルギー流は表面重力に比例することを示している．(地平線方程式はブラックホール力学の第一法則とか地平線力学の第一法則と呼ばれることもある.)

Ref. 109

上式の導出の際，途中で，

$$E \leqslant \frac{c^4}{16\pi G} \frac{A}{L} \,. \tag{109}$$

のような中間結果が得られる．地平線方程式をこのように表すと，面積とパルス長 (つまり表面重力) が与えられたとき，最大エネルギー流に到達できるのは地平線以外にはないことが，もっとはっきりとわかる．同様の結果が得られる物理領域は他にない．これらは重力理論固有のものである．

力ではなく，仕事率に注目することから始めても，この形式の地平線方程式が導出できる．この場合，最初の方程式として，$P = E/T$ を用いる．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

地平線方程式 (108) と (109) は, 自然には最大速度が存在し, 自然のは 最大力 (仕事率) が存在するという2つの仮定を行っているだけである. 特別な重力理論は用いていない. また, 以下に示すように, 地平線方程式は実験的にテストすることも可能だろう. (また, 地平線方程式, つまり, 力または仕事率の極限値が存在することは, $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t \leqslant c^3/4G$ で表せる自然界の質量変化に最大値が存在することも意味している.)

次に, 地平線方程式を, 静的で球形の地平線から一般的な地平線への一般化を行う必要がある. 最大力は, 慣性または加速観測者にかかわらずすべての観測者に対し成り立つと仮定しているので, その一般化は直接的である. 不規則に曲がったり, 時間的に変化する地平線に対し, 地平線方程式は

$$\delta E = \frac{c^2}{8\pi G}\, a\, \delta A \,. \tag{110}$$

であらわせる. 一般地平線方程式ともいえるこの微分関係はどんな地平線についても成り立つ. 動的または空間的に変化する地平線の一部δAに対しても適用できる. 一般地平線方程式 (110) は一般相対論と (本質的に) 等価であることが1995年にJacobsonにより示されてから, この等価性はよく知られるようになった. この微分地平線方程式は一般相対論において, 特殊相対論の $\mathrm{d}x = c\,\mathrm{d}t$ と同じ役割を果たしていることを示そう. 以後, 地平線方程式と書かれている時は, この一般的な微分形式の関係式 (110) を意味することにする.

Ref. 110

長さ L のエネルギーパルスの振る舞いを, 必ずしも地平線に限らない任意の表面に対して成り立つように言い換えるのが初心者にとってはいいだろう. 先ほどの導出法を繰り返すと,

$$\frac{\delta E}{\delta A} \leqslant \frac{c^4}{16\pi G}\,\frac{1}{L} \,. \tag{111}$$

が得られる. ここで, 等号は, 表面Aが地平線の時に成り立つ. 言い換えると, 物理系の $\delta E/\delta A$ の値が右辺に近づいてゆくと, 地平線の形成が始まる. この関係は, 最大値の原理に対し, 一見矛盾するような例についての議論を行う時に重要になるだろう.

地平線上ではパルス長Lは$L \leqslant c^2/2a$を満足することを念頭におけば, 一般地平線方程式は, 最大力 $c^4/4G$ または最大仕事率 $c^5/4G$ からの結果であることがはっきりする. さらに, $L \leqslant c^2/2a$ という関係は最大速度を基礎にしているので, 地平線方程式には最大速度も考慮されている. つまり, 地平線方程式は, これらの自然の2つの制限から純粋に導出されるものである.

残っている第2のステップは一般地平線方程式から一般相対論を導出することである. この導出は ヤコブソンによって行われたものだが, その骨子は次のパラグラフで紹介する. 一般地平線方程式 (110) と場の方程式の間のつながりを調べるには, 一般地平線方 程式を, 一般座標系とエネルギー-運動量流を任意方向に一般化するだけでよい. これを行うために, 曲がった時空に使われるテンソル表記を導入する.

Ref. 110

一般地平線方程式を作り出すために, 一般表面要素 $\mathrm{d}\Sigma$ と地平線を作りだす (適当なノルムをの) 局所ブーストキリングベクトル場 k を導入する. ヤコブ

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

ソンは，この２つ量を用いて一般地平線方程式 (110) の左辺を

$$\delta E = \int T_{ab} k^a \mathrm{d}\Sigma^b \,, \tag{112}$$

のように書き換えた．ここで，T_{ab} はエネルギー-運動量テンソルである．この式は，任意の座標系と任意のエネルギー流方向についての地平線のところでのエネルギーを表す．

ヤコブソンの１つの帰結は，一般地平線方程式 (110) の右辺は，(純粋に幾何学的な) Raychaudhuri方程式を用いて，

$$a\, \delta A = c^2 \int R_{ab} k^a \mathrm{d}\Sigma^b \,, \tag{113}$$

のように書き換えられることである．ここで，R_{ab} は，時空の曲率を記述するリッチテンソルである．この関係式は地平線の局所的性質がどのように局所曲率に依存するかを示している．

これらの２つのステップをつなげると，一般地平線方程式 (110) は

$$\int T_{ab} k^a \mathrm{d}\Sigma^b = \frac{c^4}{8\pi G} \int R_{ab} k^a \mathrm{d}\Sigma^b \,. \tag{114}$$

のようになる．そして，

$$T_{ab} = \frac{c^4}{8\pi G} \left(R_{ab} - (\frac{R}{2} + \Lambda) g_{ab} \right) \,, \tag{115}$$

であるときにのみ，この方程式は局所的なエネルギー保存 (つまり，エネルギー-運動量テンソルの発散がゼロになる) を満足することをヤコブソンは示した．ここで，R はリッチスカラーで，Λ は問題では値が決定されない積分定数である．この方程式は，宇宙定数 Λ を含んだ一般相対論の完全な場の方程式になっており，この場の方程式は地平線方程式から導かれた．従って，これらは地平線で成り立つ．

適切な座標変換を選ぶと，地平線を好きな時空点に位置づけることができるので，全時空上で場の方程式は成り立つはずである．これで，ヤコブソンの議論は完了する．場の方程式は，地平線方程式を通して，最大力の原理から導かれるので，自然界では，どの時空点でも同じ最大力を持つことを示したことになる．つまり，最大力の値は自然の不変定数である．

言い換えると，一般相対論の場の方程式は，地平線上でエネルギー流に制限があることかられでの直接の帰結である．，すなわち，それは最大力 (仕事率) のためである．実際，ヤコブソンの導出によれば，この議論はいずれの方向に対しても成り立つ．最大力 (仕事率) ，地平線方程式，一般相対論は同じことを言っているのだ．

最大力からの一般相対論の方程式の導出は，重力が純粋に幾何学的なものであるという仮定の下でのみ成 立することを付け加えておく．これは一般相対論では本質的なことだ．もし，重力のメカニズムが，未知の粒子のように他の場を基本にするようなものだったとしたら，重力と最大力の間の等価性はもはや

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

成り立たない.

最大力の原理または最大仕事率の原理から一般相対論が導出されたので, これらの極限を地平線力や地平線仕事率と呼ぶことができるようになった. 場の方程式を実験的にまたは理論的に確認することは, 間接的に, これらの極限の存在を確認することになる.

重力, 時空の曲率, 地平線そして最大力

前節の結果をわかりやすい言い方で繰り返してみよう.

二人の観測者が互いに平行に動き始め, そのまま直進するとする. 少し して, 二人は平行に動いていないと気付いたなら, 彼らは曲面, または, 曲がった空間を運動していると言える (やってみてください.) . 質量や局所エネルギーの近傍では, このように, 平行運動から外れてゆくだろう. これより, 質量の近くでは時空が曲がっていると結論付けられる. つまり, 単純に言えば, 重力が空間を曲げるのだ.

Challenge 160 s

重力があると加速度が生じる. そして, 加速度があると距離 c^2/a の所に地平線を生じる. 日常生活ではこのような地平線を見ることはない. しかし, 質量が半径$r = 2Gm/c^2$内に集中すると, その物体の周りには地平線が生じる. このような物体は (シュヴァルツシルト) ブラックホールと呼ばれている. 質量 m のブラックホールの周りの曲率は, その質量の物体の周りで実現できる最大の曲率になっている.

Page 247

ブラックホールは永遠に自由落下する物質と見ることもできる. 後に, ブラックホールについては詳しく調べることにしよう. ブラックホールでも, 地平線同様, 境界の「向こう側」に何があるかを検出することはできない. *

ブラックホールの性質は表面重力 a とエネルギー流 E.で表せる.

▷ 最大力の原理とは, 簡単に言うと, 地平線上で, エネルギー流は面積と表面重力に比例することである.

この関係から, 一般相対論全体を導出できる. 特に, 時空がどう曲がるかを最大力の値から説明できる. これから, 少しの間, この関係について詳しく見てみよう.

自然界に, もし, 力の上限がなかったとしたら, 地平線の表面からエネルギーを好きなだけ取り出せるだろう. こうなると, エネルギー流は面積に比例せず, 地平線もこれまで述べたような性質を持たず, 一般相対論も成り立たなくなるだろう. これから, エネルギーの最大流, 運動量の最大流, 質量の最大流は地平線に結びついているとわかる. その結びつきがもっとも明白なのがブラックホールで, エネルギー, 運動量そして質量がここに落ちてゆく.

Page 250

特殊相対論と一般相対論の類似性をさらに進めることができる. 特殊相対論では, 最大速度は $\mathrm{d}x = c\,\mathrm{d}t$ を意味し, 時間の変化は観測者によって異なる. 一般相対論では, 最大力 (または仕事率) の存在は地平線方程式 $\delta E = \frac{c^2}{8\pi G}\, a\, \delta A$ と時空が曲がることを意味する. 地平線方程式は一般相対論の場の方程式なのである. 一言で言えば,

▷ 最大力の存在のため, 質量の近くでは時空が曲がり, それがどう曲

* 特殊相対論で, 光の壁より高速で動くものを検出できないのと同じことである.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

がっているかを示している.

最大力（または仕事率）は，特殊相対論で最大速度が果たす2つの役割と同じ役割を，一般相対論で果たしている．特殊相対論では，光の速度は最大速度であり，式 $\mathrm{d}x = c\,\mathrm{d}t$ から明らかなように，空間と時間を結びつける比例定数でもある．一般相対論では，地平線力が最大力である．そして，エネルギーと曲率を結びつける比例定数として，(因子 2π とともに) 場の方程式の中に登場してくる．最大力は，時空の弾性と-時空を単純な媒体として用いるなら-時空が受ける最大張力の両方を記述している．物質科学では，このように物質定数が比例因子と極限値として2つの役割を担うことはよく知られている．

Ref. 103

なぜ，最大力も曲率とエネルギー間の比例因子になるのだろうか．時空を弾性体と考えてみよう．* 物質の弾性は物質定数値で記述される．物質定数の最も簡単な定義は，張力（長さの比例変化）対する応力（面積当たりの力）の比である．正確にはその時の幾何学を考慮しなければいけない．たとえば，剪断係数 G（または μ）は２つの平行な平面において，一方の面を別の面に対して動かすのがどれほど，難しいかを表す．面積 A，長さ l の２つの平行平面を互いに距離 Δl 動かすのに力 F が必要なら，剪断係数Gは

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta l}{l} \,. \tag{116}$$

で定義される．金属や合金の剪断係数は25と80 GPaの間にある．固体の連続体理論によると，欠陥のまったくない結晶固体（「完全な」固体）では，いわゆる 理論剪断応力が存在する．この値より大きな応力を与えると，物質は破壊される．言い換えると，この理論剪断応力は

$$G_{\mathrm{tss}} = \frac{G}{2\pi} \,. \tag{117}$$

と書ける．最大応力は，本質的に，剪断係数で与えられる．この結びつきは，真空に対し発見されたものと同じである．真空を曲げることのできる物質と考えると，一般相対論を理解しやすくなる．以降の記述では，このことをよく使うことになる．

Ref. 111

真空に最大力の応力がかかるとどうなるだろうか．実際は真空が引き裂かれ，粒子が現れる．この関係にこにおいて，これからもっと多くのことを発見するのだが，粒子は量子体なので，まず，量子論を学ぶ必要がある．その後，この冒険の一番最後でこの効果について記述する．

Vol. VI, page ??

力と仕事率の極限が成り立つ条件

最大力はある条件下のみで成り立つ．この点をはっきりさせるためには，この条件を最大速度になぞらえる必要がある．最大速度が正当であるためには3つの条件がある．

* このアナロジーからエーテルを連想するか，心配する必要はない．物理学ではエーテルの概念は不要だ．なぜなら，真空と区別がつかないからだ．一般相対論は，真空を変形でき移動することの可能なある種の物質として記述する．しかし，エーテルは不要で，導入の必要もない．

Vol. III, page ??

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

まず，第1に（真空中の）光の速度が 運動量またはエネルギーを持つ運動系の極限の速度になる．しかし，物質ではない点の運動に対してはこれを超えることがある．例えば，はさみの切断点，月面上のレーザー光ののスポット，波群の群速度や位相速度などは光速を超えることがある．

Page 53

第2に，光の速度は，運動する質量やエネルギーの近くで測定した時のみ，極限値になる．つまり，月が自分の軸の周りで1秒で回っているなら，光より速く動く．また，フリードマン宇宙の互いに遠く離れた点は光速より速く離れてゆく．

第3に，速度の測定者は実体でなければならない．つまり，測定者は物質であって，エネルギ体でなければならない．従って，観測者は光よりゆっくりと動いて系を観測する．光速またはそれ以上の速度で動く系は観測者になることはできない．

Ref. 112

最大力と最大仕事率が成り立つためには，この3つ条件と同様のものを一般相対論に適用する．取り分け，第3のポイントは重要である．特に，相対論的重力では，点の観測者や点のテスト質量を認めない．これらは現実的ではないからだ．光速より速く動く表面も現実的ではない．このような場合では，最大力に対する反する例を見つけることができる．一度探してみてください．たくさん見つかるはずです．そのどれもが興味深いものばかりです．いまから，その中で特に重要なものをいくつか調べてみよう．

Challenge 161 s

力の極限についての思考実験とパラドクス

> Wenn eine Idee am Horizonte eben aufgeht, ist gewöhnlich die Temperatur der Seele dabei sehr kalt. Erst allmählich entwickelt die Idee ihre Wärme, und am heissesten ist diese (das heisst sie tut ihre grössten Wirkungen), wenn der Glaube an die Idee schon wieder im Sinken ist.
>
> フリードリッヒ・ニーチェ (Friedrich Nietzsche) *

力の極限値の議論で，重要なステップは速度の極限の議論の時と同じである．どんな実験でも，力の極限より大きな力にたどり着けないことがわかった．しかし，力の極限を越えようとする実験は想像できないことを示す必要もある．20世紀初頭，このような実験を思考実験と呼んでいた．これをドイツ語ではGedankenexperimentと呼んでいる．

最大速度を超えられないことを納得するには，速度の合成の性質と光速近辺での運動エネルギーの発散を調べればそれでよかった．最大力の場合は，もっと多くの作業が必要になる．つまり，最大力，最大仕事率と最大質量変化について述べようとすると，多くの障害が簡単に出てきてしまうのだ．

* *

荒っぽい方法で力を扱う．力の極限を超えるもっとも単純な方法は，最大値よ

* 「アイデアが地平線からちょうど上るとき，そのことについての魂の温度は普通冷めている．徐々にそのアイデアは暖まり，そして，そのアイデアの確信がまた下降し始める時に，もっとも熱っぽくなる（すなわち，最大の影響が現れる）」 フリードリッヒ・ニーチェ (Friedrich Nietzsche) (1844–1900)，ドイツの哲学者．アフォリズム 207 – アイデアの黄道 – 人間的，あまりに人間的 – 漂泊者とその影．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

り大きい力で物体を加速してみることである．加速を行うにはエネルギーの移動を伴うが，この移動は，地平線方程式 (110) または極限値 (111) で制限されてしまう．力の極限を超えようとすると，エネルギー流の結果として地平線が出現する．そして，この地平線のため相互作用が制限され，力がその制限を超えられなくなる．

この極限は直接調べることができる．特殊相対論では，物体の加速は長さによ
Page 93
り制限されることがわかった．実際，加速 a と逆方向の距離 $c^2/2a$ の所に地平線が現れる．言い換えると，少なくとも，この点で加速物体は壊れてしまう．質量 M，半径 R の物体に作用する力 F は

$$F \leqslant \frac{M}{2R}\, c^2 \,. \tag{118}$$

で制限される．重力効果（普通は小さい）を含めるにはそのまま行えばよい．観測できるようにするには，加速物体はブラックホールより大きくなければならない．対応する半径 $R = 2GM/c^2$ を代入してみると，力の極限になってしまう (103)．このように，力の制限を超えるための動力学的アプローチは失敗してしまう．

* *

ロープについて．静的な状態，例えば，一本のロープの両端を反対方向に引っ張って，より大きな力を発生させることができるか試してみることもできる．単純のため，絶対に切れないロープが存在すると仮定する．どんなロープでも構わない．なぜなら，原子間のポテンシャルエネルギーにより，原子間に強い力を発生させることができるからである．制限値を超えるロープの力を発生させるためには，ロープ内に大きな（弾性）エネルギーを蓄える必要がある．このエネルギーはロープの両端から入ってくる．ロープの張力がどんどん強くなると，より小さな領域により大きな（弾性）エネルギーが蓄えられるようになるだろう．力の制限値を越えるには，地平線方程式で許されるより大きな単位長当たり単位面積当たりのエネルギーを加える必要がある．この時，必ず地平線が現れてしまう．しかし，たとえ，ロープが切れないような物であっても，地平線を横切れるほどロープを伸ばす方法は存在しない．地平線はロープを切断するか，引っ張り装置から引き離してしまうかのいずれかである．従って，地平線は，力の極限より大きな力を発生することはできない．実は，ワイヤーの無限大強度の仮定は不要なのである．たとえ，ワイヤーの強度が有限であっても，力の制限値は超えられないのだ．

適用する力が，ワイヤーまたはロープに関し，引っ張る力なのか押す力なのかということは重要ではない．二つの物体を，お互い，押す場合でも，際限なく力の値を増加させると，同じように，地平線方程式で与えられる制限のため，地平線が作られてしまう．定義によれば，これは，正確に，力の制限の所で起きる．何かを，押したり，引いたりするのに地平線を使えないため，ひとたび，地平線が形成されてしまうと，端点にそれ以上の力を作ることはできない．静的力は制限値を超えることはできない．

* *

ブレーキについて．極限の力を与えると，時間あたりの運動量変化が最大にな

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

る．動いている物理系をものすごく急激に停止させる方法を見いだせれば最大
Page 93 力を超えられるかもしれない．　特殊相対論からすでに知られているように，自然界には剛体は存在せず，完全に急速な停止は不可能であるが，特殊相対論，それ自体は，停止時間に限界を付加するものではない．しかし，重力は限界を与える．運動物体を止めることはエネルギーの移動を意味する．単位面積当たりのエネルギー流れは地平線方程式で与えられる値を超えることはできない．従って，物体を止めることで，力の極限をこえることはできない．

同様に，高速な系が，止まるのではなく，反射される場合でも，いくらかの量のエネルギーは，短時間に移動し蓄積しなければならない．たとえば，テニスボールが大きな壁で跳ね返される時には，運動量が変化し，力が加わる．多くのボールが同時に跳ね返れば，最大値より大きな力を作ることができるかもしれない．これも不可能である．これをやったら，壁の所でのエネルギーの流れは地平線方程式で示されている極限に到達し，地平線を作ってしまう．こうなると，反射はもはや起こらない．そのため，制限値を超えることはできない．

* *

古典的輻射について．物体を引いたり，押したり，止めたり，跳ね返したする系ではなく，輻射が関係する系を考えてみよう．といっても，光子が関係するにしても，重力子または他の粒子にしても，議論はまったく同じである．壁が制限したように，鏡がその可能性を制限してしまう．つまり，光と鏡を使って，$c^4/4G$より大きな運動量変化を作り出すことはできない．

また，多量の光を表面に集中させても，最大力を超える力を作り出すことはできない．テニスボールと同じことが起きてしまう．地平線方程式 (111) で与えられる制限値 E/A に到達すると，地平線が生じ，極限を破ることが出来なくなる．

* *

レンガについて．もっと，堅固な思考実験で．力と仕事率の極限についてテストすることもできる．積み重ねた重量で，力の極限を超えることができるかどうかを試してみる．無限の高さをもつレンガの塔を積んでも，その根元にこれだけの力を発生させることはできない．重さを積分し，高さの減少を考慮すると，値は有限値になり，その値は力の極限に到達しない．一方，レンガの質量密度を連続的に増やし続けると，塔と地球がブラックホールに変わってしまう．そしてブラックホールは力の極限を超えることを許さない．

* *

ブーストについて．ブーストは，見かけ上，ある系の3元力 F を別の系の好き
Ref. 113 な値 F' に変換するように選ぶことができる．　これは誤りであることがわかる．相対論では，ブーストを使い3元力を境界値より大きくすることはできな
Page 76 い．すべての座標系で，測定される3元力は固有力，つまり，共動座標系で測定される3元力を超えることはできない．(この状況は，どんなブーストを選んでも，3元速度はcを越えるられないことと似ている．しかし，変換のされ方は，3元力と3元速度では大きく違っているので，厳密に同じとは言えない.)

* *

発散について．シュワルツシルトブラックホール ($\Lambda = 0$) から動径方向の距離

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Ref. 106 d の所にあるテスト質量 m に働く力は

$$F = \frac{GMm}{d^2\sqrt{1-\frac{2GM}{dc^2}}} \,. \tag{119}$$

で与えられる．同様に，万有引力の逆二乗則では，2つの質量 m と M の間の力は

$$F = \frac{GMm}{d^2} \,. \tag{120}$$

となる．両式ともどんな値でも持つことが可能である．つまり，これは最大極限がないことを表している．

詳細に調べると，最大力はやはり成り立つのだ．実際，2つの状況で発散が起きるのは非物理的な点状質量に対してのみである．しかし，最大力となる，質量 m までの最小接近距離は ，

$$d_{\text{min}} = \frac{2Gm}{c^2} \,. \tag{121}$$

となる．単純に言えば，対応するブラックホールの半径が最少接近距離になると考えられるが，2つの質量間距離，つまり，地平線と質量までの距離をゼロにすることはできない．従って，質量は点にすることは できず，(現実に) 最小接近距離というのが存在することを意味する．もし，この最小接近距離が方程式 (119) と (120) から導けるとすると，

$$F = \frac{c^4}{4G}\,\frac{Mm}{(M+m)^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{M}{M+m}}} \leqslant \frac{c^4}{4G} \,. \tag{122}$$

となる．万有引力の近似では

$$F = \frac{c^4}{4G}\,\frac{Mm}{(M+m)^2} \leqslant \frac{c^4}{4G}. \tag{123}$$

となる．いずれの場合も，観測者の質量を考慮すると，最大力の値を超えることはない．

* *

無矛盾問題．観測者が点状になれないのなら，運動量変化やエネルギー変化を定義する本来のやり方をある平面上の観測者による測定値を積分として採用するのは正しいかどうかという疑問が生じる．一般相対論においては，観測者は点状になることはできないが，可能な限り小さくはなれる．従って，本来の定義も，観測者の大きさが無限に小さくなるという極限をとることで，依然として，適用可能である．量子論を考えると，明らかに，この極限過程はプランク長で終わりになる．考えている状況のサイズがこの値と比べて十分大きい限り，これは一般相対論の問題ではない．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

* *

量子の問題. 量子効果を無視すれば, 尖った角度を持つ平面や力の極限値を超えるフラクタル形状を作ることができる. Challenge 162 e このことはプランク長より短い長さを実現できるか測定できることを仮定しているため, このような面は物理的なものではない. ある表面が物理的であるという条件は, プランク長により与えられる本質的な不確定性を持たないといけないことを意味する. Ref. 105 詳細な研究によれば, 量子効果は地平線力を超えることを許さない.

* *

極度に相対論的な観測者のついて. 高速の慣性運動, 加速運動に関わりなく, 観測者が極端な相対論的状態にあっても, 極限を超えることはできない. 古典物理学では, 測定をするための相互作用を好きなだけ小さくすることができる. しかし, これは, すべての観測者にとって成り立つわけでない. 特に, 相対論的な観測者の場合はこれを満足しない. 彼らにとって, 測定のための相互作用は大きい. その結果, 地平線が生じ, このため, 制限を超えることはできない.

* *

微視的な場合について. 小さな粒子をできるだけ強く加速したり, 他の粒子と衝突させることで, 力の極限を超えることができるかもしれない. 2個の高エネルギー粒子が互いに衝突すると, 実際, 強い力が生じる. しかし, 2個の粒子の結合エネルギーが力の極限を超えるぐらい強いとしたら, これらが十分近づく前に, 地平線が現れてしまう.

実際, 量子論でも, まさに, 同じ結果を導く. 量子論自身に加速の制限がすでに組み込まれている. Ref. 114 質量 m の粒子に対しては,

$$a \leqslant \frac{2mc^3}{\hbar} \,. \tag{124}$$

が得られる. ここで, $\hbar = 1.1 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$ は, 自然基本定 $\hbar = 1.1 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$ は作用量子である. 特に, 粒子加速器, 粒子の衝突や, 対生成ではこの加速度の極限値が満足される. たとえば, 強い電磁場中やブラックホールの地平線の近くでの自発電子陽電子対生成はこの極限状態にあると言える (124). 素粒子において可能な最大質量, つまり, (修正) プランク質量を代入すると, 地平線力を表す式 (124) は, 素粒子に対する上限となる. Vol. VI, page ??

* *

圧縮について. ブラックホールは, 本当に, 物質またはエネルギーの最も高密度な形態なのだろうか. ブラックホール熱力学の研究から, ブラックホールより, 高密度に質量を集中させると熱力学の原理に矛盾が生じることが示されている. Ref. 106 ブラックホール熱力学においては, 表面とエントロピーが関係づけられている. つまり, ブラックホールの半径より小さいサイズに物理系を圧縮すると, エントロピーが減少するという逆の過程が起こり得る. つまり, ブラックホールのサイズは自然界における質量の極限のサイズである. 別の言い方をすれば, 自然界で力の極限を超えることはできない.

* *

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

力の合成について．特殊相対論では，単純なベクトルの足し算で速度を合成することはできない．同様に，力に関しても，このような単純な足し算はできない．このような力の合成をしようとすると，地平線を形成してしまう．もし相対論の教科書が，速度ベクトルの説明と同じように注意深く，力の足し算の振る舞いを調べていたら，書物に力の上限についての記述が，もっと以前に登場していたであろう．(一般相対論では正式な取り扱いがされないといけないのは当然である.) 自然界では，大きな力は，単純に，足し算することはできない．

* *

特殊相対論では，ある座標系で光よりゆっくり運動する物体は，すべての座標系でそのように動く．ある座標系で不変の極限 $c^4/4G$ より小さい力は，どんな座標系でも小さいことを示せるか．

Challenge 163 s

* *

最大力を超える力を作り出すのに，宇宙定数を使ってみることも可能かもしれない．これは不可能であることがGary Gibbonsにより示されている．

* *

他に，力や仕事率の極限を越えるための方法を提案したり，解決したりできるか．

Challenge 164 r

仕事率と質量流の限界についての思考実験

力に上限があるように，仕事率についても思いつくあらゆる系で上限があってもおかしくはない．ここでは，その論破を試みよう．

* *

ケーブルカーについて．切れることのない重さの無いロープ（このようなロープがある仮定して）を用いて質量を加速しているエンジンを想像しよう．エンジンが仕事率の極限値にくると，エンジンまたはその排気が地平線の式に到達する．地平線が現れると，ロープが無限に強いものでも，地平線を通過することができず，エンジンはロープを引き続けることができなくなる．従って，エンジンが加速物体の内部にあろうと，外部にあろうと，物体を引っ張るロープの端では仕事率の極限になってしまう．

* *

山について．Figure 60の表面Aのように，ある山のすべての原子核の真下を通るようにした奇妙に変曲した表面を定義することができる．海面より上にある山を構成するすべての原子は，触るか触らないかの位置でその表面の真上にある．いま，この面が光速に近い速度で上方に動いているとすると，この面を通過する質量流は，質量流の極限より大きくなることを示すのは難しくない．質量流の極限 $c^3/4G$ は約 10^{35} kg/sになる．原子核の径を光速で割った 10^{-22} sの時間内に，10^{13} kgの質量が表面を通過しさえばよい．今の場合，これが山の質量になる．

この面はこの極限に対する反証になっているかのように見える．しかし，よく考えると，そうではない．問題は「真下」という表現である．原子核は量子

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

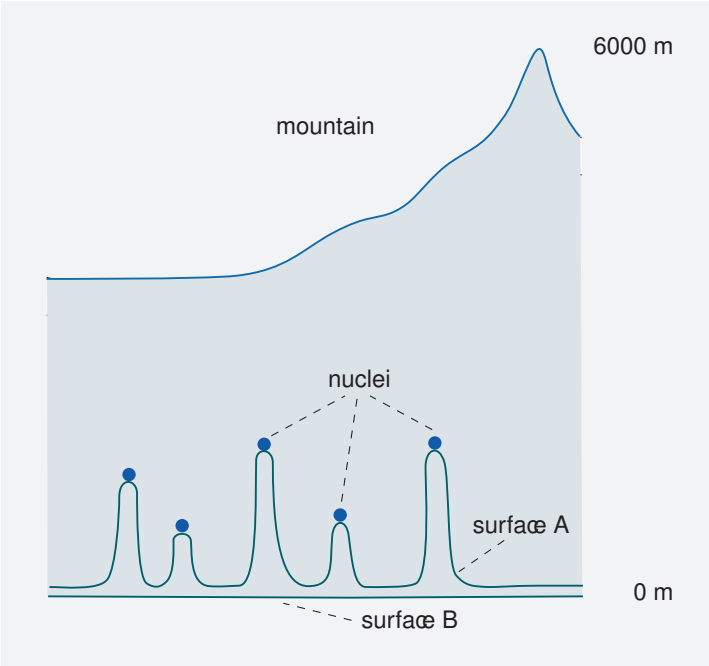


FIGURE 60 最大質量流の値を超える山について

粒子であり，位置について不確定性がある．この不確定性で問題になるのは原子核と原子核の距離である．結果として，問題の面の上に，確実に，すべての原子があるようにするには，その形はFigure 60の表面Aのようにはならない．図の表面Bのように，山全体の下にある平坦な面でなければならない．しかし，山の底面が平坦では，質量変化極限を超えることはできない．

* *

複数の原子について．1つの山を構成するする原子の数と同じくらい多くの原子を，(大体) 大きな間隔で，一平面上に並べたとする．また，この面を光速で上方に動かす．この場合も，原子の位置の不確定さのために，限界を超える質量流を観測したり，主張することはできない．

* *

複数のブラックホールについて．通常，ブラックホールは大きいので，位置の不確定性は無視できる．質量の極限 $c^3/4G$，または，仕事率の極限$c^5/4G$は，平面を光速で横切る一個のブラックホールの流れに対応している．光速で複数のブラックホールが平面を横切ると，極限を打ち破ることができるかもしれない．しかし，表面は物理的でないといけない．つまり，面の各点にそれぞれ一人ずつ観測者を配置できないといけない．しかし，ブラックホールを横切ることができる観測者はいない．ブラックホールは平面を有効に打ち破る．しかし，ブラックホールは平面を横切ったとだれも言えない．このことは，ブラックホールが一個でも，複数でも同じである．極限はやはり存在している．

* *

複数の中性子星について．(同じ質量でも，ブラックホールと比べると密度が小

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

さい) 中性子星が複数集まって, 同時に, 高速平面を横切ったらどうだろう. 速度が光速に近づくと, 中性子星から遠く離れた点や実際星を横切る点の横断時間は大きく異なる. ほとんどブラックホールといってもよい中性子星は, 星から遠く離れたところの座標時計の単位では短時間で横切ることはできない. ここでも, 制限値を超えることはできない.

* *

光度について. 最大光度の境界が天文物理学者により議論されるようになっている. 十分な一般性を持って, 仕事率, つまり, 単位時間当たりのエネルギーの最大境界の存在は, 任意の物理面を通るどんなエネルギー流に対しても成り立つ. その物理面としては, 宇宙全体に広がるものなのかもしれない. しかし, 宇宙のすべての灯り, すべての星, すべての銀河を持ち寄っても, 提唱されている極限より大きな仕事率をもつ面を作り出すことはできない.

Ref. 106

その表面は物理的でなければならない. *表面の各天上に観測者を配置することが可能なら, 表面は物理的である. 特に, 物理表面は地平線と交わることも, ある最小長より小さい局所的な詳細を持つこともないだろう. この最小長は, 後に, で導入するが, 修正プランク長により与えられる. もし, 表面が物理的でなければ, 仕事率や力の極限に対する反例を可能にしてしまう. しかし, これらの非物理的な反例は自然についての記述を与えない. (*Ex falso quodlibet.***)

Vol. VI, page ??

Challenge 165 s

* *

多くのランプについて. または仕事率パラドクス.. 絶対仕事率極限は任意の考え得る物理表面を通過するエネルギー移動率に制限を加える. 一見して, 最大値の3/4を放出する2つの輻射源から放出されるエネルギーが結合されると, 全部で最大値の3/2倍のエネルギーを放出することになり, 仕事率極限値を超えてしまうことになる. しかし, このような二つの光源は, 非常に質量が大きく, 周囲に地平線, つまり, ブラックホールを作ってしまうと考えられる. また, 地平線の極限 (111) に到達してしまい, 生じた地平線が光を呑み込んでしまい, 力や仕事率の極限を超えることができない. 自然界においては, 巨大な仕事率値を単純に加えることはできないと言える.

Challenge 166 e

* *

光を集めることについて. 次に, 強力な球面光を, 短時間, 球状質量に照射することを考えてみる. 一見すると, 力や仕事率の極限を超えられそうに見える. なぜなら, 光を小さな体積に集中できるからである. しかし, 光エネルギーを高度に集中させると, ブラックホールができるか, それに相当する質量を作ってしまう. 仕事率の極限で示されるものより速い割合でエネルギーを質量に送り込む方法はない. 実際, 光源を集めて, 全出力を仕事率の極限より大きくすることはできない. 力の極限に近づくと, 極限を越えることを阻む地平線が現れる.

* 物理的に感知できるとも言うことができる.
** '嘘からはどんなものでも導ける.'

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

* *

ブラックホールについて．仕事率の極限に近づける系があるとしたら，ブラックホール蒸発の最終段階である．しかし，これにしても超えるのではなくて，等しくなるだけである．

* *

飽和について．もし，宇宙が，すでに，仕事率の極限を飽和状態にしてしまっているとしたら，新しい源がそれを壊すか，どこかの別の源を停止させる必要がある．この議論には誤りがあることを示せるか?

Challenge 167 s

* *

水の流れについて．断面積 A の大きな管を可能な限り高速で水を流してみる．しかし，速度 v で流れる水で満たした長さLの管が，質量流の極限に近くなると，断面積 A をポンピングされるのを待つ水の重力が，その面積を通す水の速度を遅くしてしまう．またもや，極限に近づくと，断面積 A が地平線に変わってしまう．

* *

微視的な系から天体物理に至るまで，最大仕事率や最大質量流を超えるシステムがないことをチェックすることは，一般相対論をより深くテストすることを意味する．全宇宙を表面としたり，任意の数の素粒子反応に拡張すれば，反例は容易に見つかるような気がする．ところが，うまくいった例はない．

* *

まとめると，力，仕事率，質量流の極限に挑んだすべてのケースで，空間でのエネルギー流が空間のブラックホール質量エネルギー密度に近づいたり，時間でのエネルギー流が極限の運動量流に近づくと，事象の地平線が現れ，極限を超えることを許さない．観測と理論の両面で，3つの極限を確認した．これらの極限を超える値を作ることも，測定することもできない．また，思考実験によれば，これらの3つの境界は厳格である．当然，これらの制限については今後のさらなるテストやさらなる思考実験にゆだねられる．(もし，名案があれば知らせてほしい.)

Challenge 168 r

最大力はなぜこれほど長く発見されなかったか

最大力の原理が，これほど長い間，見つからずにきた第*1*の理由はは，日常生活に地平線が存在しないためである．そのために，日常生活の経験において，力や仕事率の極限に光が当てられることがなかった．長い間かかって，物理学者は夜の空が暗いことが特別なことではなく，自然界でよく観測されることにすぎないと気付いたのだ．つまり，自然界には地平線がたくさんある．しかし，日常生活おいて，地平線は，幸い，最も近いものでも，銀河系の中心にしかないため，重要な役割を果たしていない．

最大力が隠されている第*2*の理由は，点粒子が存在するという誤った考えにある．これは，ガリレイ物理で通常使われる理想化による偏見からくる．一般相対論を完全に理解するには，点粒子，点質量や点状の観測者は存在しないことを，絶えず思い起こすことが重要になる．これらは，ガリレイ物理，特殊相対

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

論，量子論においてのみ扱える近似である．一般相対論においては，地平線のため，点状システムは許されない．質量定数を一定にしておいて，系の大きさをいくらでも小さくできると信じる誤った考えになれてしまうと，力や仕事率の極限というものに気付かなくなる．

最大力の原理が，見つからなかったThe 第3の理由は，力の概念に対する誤った考えである．一般相対論では重力を定義するのは難しい．ガリレイ物理でも，力は表面を貫いて流れる運動量流であることをほとんど強調されることはない．力の概念について，何世紀にわたって，一部の例外を除いて，きちんと教育されておらず，しばしば，省略されてきた．

Ref. 115

つまり，最大力の原理，または，最大仕事率の原理は，自然の「陰謀」と大部分の実験および理論物理学者からそれを覆い隠そうとする思考傾向のため，長い間，見つけられずにきたのだ．

一般相対論を直観的に理解する

> Wir leben zwar alle unter dem gleichen Himmel, aber wir haben nicht alle den gleichen Horizont. *
>
> コンラッド・アデナウワー (Konrad Adenauer)

地平線での力と地平線での仕事率の考え方は，一般相対論への直接的かつ直観的アプローチの基礎として利用できる．

* *

重力とはなにか．これに対し多くの答えと出会うだろうが，そのなかでも，最高の答えは次のものである．重力は最大力の'影'である．重力を弱いものとして体験する私たちがいるなら，同じ点，同じ時刻に最大力を体験でする観測者も存在すると考えられる．この性質を正しく探索するのは良い訓練になる．言い換えれば，最大力が存在しないとしたら，重力も存在しない．

* *

最大力は万有引力を暗に意味している．これを理解するために，簡単な惑星系，つまり，小さな速度と小さな力を持つ惑星系を考えてみよう．サイズ L の単純な惑星系は，中心質量Mの周りを，動径半径 $R = L/2$ で回転している小さな惑星系である．a を物体の加速度とする．小さい速度とは特殊相対論から，条件 $aL \ll c^2$ を意味し，小さな力とは，力の極限より，$\sqrt{4GMa} \ll c^2$ を意味する．これらの条件は系全体およびそのすべての構成要素に対し成り立っている．式は両方とも，速度の二乗の次元を持っている．この系を特徴づける速度はたった一つしかないので，2つの式 $aL = 2aR$ と $\sqrt{4GMa}$ は比例するはずである．従って，

$$a = f\frac{GM}{R^2}\,, \tag{125}$$

となる．ここで，因子 f，別途，決定する必要がある．これを決めるために，中心物体から離脱するための脱出速度を調べる．ブラックホールより大きなサイ

* '私たちは，みんな，同じ空の下に生きているが，異なった地平線を有している.' コンラッド・アデナウワー (Konrad Adenauer) (1876–1967), 西ドイツ首相

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

ズの物体からの脱出速度は光速より小さい．式 (125) によれば，質量 M および半径 R の物体からの脱出速度は $v_{\text{esc}}^2 = 2fGM/R$ となる．物体の最小半径は $R = 2GM/c^2$ で与えられることから，$f = 1$ となる．つまり，低速で弱い力に対しては，逆二乗則が，中心物の周りを運動する惑星の軌道を記述する．

* *

空っぽの時空が，金属片のように弾性を持っているとしたら，振動するだろう．変形により復元力が生じると，どんな物理系でも振動する．先に述べたように，真空にはこのような力がある．これを重力と呼んでいる．言い換えると，真空は振動をするはずで，もし，広がりを持っているなら，波が生じる．実際に，後
Page 162 述するように，重力波の存在が一般相対論により予言されている．

* *

曲率とエネルギーが関係しているなら，重力エネルギーに対しても，最大速度の原理が成り立つにちがいない．実際，重力も有限の伝播速度を持っていることを後で学ぶ．日常生活の逆二乗則は，速度の最大値とは矛盾するので，なりたたなくなっても構わない．最大速度から導かれる補正については，すぐ後で言及する．さらに，重力波は質量のないエネルギーの波であるから，最大速度
Page 162 が伝播速度になると考えられる．実際，そうなっている．

* *

物体の密度は，それと同じ質量を持つ (非回転) ブラックホールより密になることはできない．地平線における最大力や最大仕事率のために，質量をより小さな地平線に押しつぶすことはできない．従って，最大力制限は，質量 m の物理系のサイズ L の極限と読み替えることができる．

$$L \geqslant \frac{4Gm}{c^2} \,. \tag{126}$$

ブラックホールの半径の２倍を，ブラックホールの「サイズ」と呼ぶなら，この値より小さなサイズの質量mの物理系はないということになる．*サイズ極限は一般相対論において重要な役割を果たしている．ブラックホールの最大「サイズ」を表す逆の不等式 $m \geqslant \sqrt{A/16\pi}\, c^2/G$ はペンローズの不等式とよばれ，多くの実際の物理系でなりたっている．ペンローズの不等式は最大力を意味していると考えられ，逆に，最大力はペンローズの不等式を意味していると考えられる．最大力の原理，つまり，物質エネルギー系の最小サイズのおかげで，裸の特異点が形成されずに済んでいる．(物理学者は裸の特異点が存在しないという仮説を宇宙検閲官仮説と呼んでいる．)

* *

どんなエネルギー源にも仕事率の制限がある．特に，値 $c^5/4G$ がすべての重力
Ref. 106 源を制限する．実際，どの重力波放出の公式でもこの値が上限である．さらに，相対論の数値シミュレーションでもこれを超えることはない．例えば，二つのブラックホールが融合している間でも，放出仕事率はこの極限値以下である．

* サイズ極限に対する質量の最大値は上述した最大質量変化に等しい．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

* *

自然界には，完全な平面波は存在しない．平面波は無限の広がりを持つからである．電気力学でも，重力波でも無限なものはない．なぜなら，無限の平面波は，極限値で許されている値より大きな単位時間当たり運動量を持って，ある平面を通過するからである．平面重力波が存在しないおかげで，二つの波が衝突しても特異点が生じることはない．

* *

自然界には無限の力も存在しない．従って，自然界には特異点もない．地平線のために特異点は現れない．特に，ビッグバンは特異点ではなかった．特異点の存在を暗に含んでいるような ペンローズとホーキングによる数学定理は，「塵」のような形態での点質量の存在を仮定しており，一般相対論の内容と相反している．このような証明は一つ一つ注意深く再吟味する必要がある．

* *

力の極限の存在は，時空の安定性にも制限があることを意味する．この制限の存在は時空が裂かれる可能性があることを示唆するが，これがそれにあたる．しかし，これがどうやって起きるかは，一般相対論で記述されない．これについてはこの教科書の最後の部分で述べる．

* *

最大力は力の標準である．つまり，重力定数 G が空間的にまた時間的に一定であることを示す．いいかえると，空間または時間が移動したときに，その変化を検出できないということである．現在のところ，高い精度で，実験データ
Ref. 118 はこれを支持している．

* *

最大力の原理は，他の型のエネルギー同様，重力エネルギーも（定義できる限りにおいて）重力場中で減少することを意味している．その結果，最大力の原理はNordtvedt効果がゼロになることを予測する．Nordtvedt効果とは，もし，地球と月から成る系の重力エネルギーが減少しないとしたら，月の軌道に生じる仮想周期的変化である．月までの距離の測定より，こんな効果はないことが確認されている．

* *

Page 247 もし，地平線が表面だとしたら，何色だろうか．この疑問はあとで調べよう．

* *

量子効果を使っても，力や仕事率の極限を超えるのは不可能であることが後
Vol. VI, page ?? でわかだろう．（なぜかわかるか.） また，量子論では，運動に対する制限がある．つまり，作用ついての最小限度が存在する．(次元解析から，このことはすでに示した．c と G を組み合わせて，作用を定義することはできない.）従って，量子論と一般相対論を結合させたところで，力と仕事率の制限を超えることはできない．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

* *

速度 c と力 $c^4/4G$ の値に上限があるとすると，G 自身ついては何が言えるのだろうか．重力定数 G は重力の相互作用の強さを表している．実際，G はあり得る最小の相互作用を表している．いいかえると，質量 M の中心物体があり，距離 r の所で，中心物体と何らかの相互作用を総合作用するテスト物体の加速度 a がわかったなら，比 ar^2/M は，G と少なくとも等しくなる．(静止衛星や結晶中の原子は反例にならないことを示せるか?) まとめると，重力定数 G も，自然界では，極限値を持つ．

Challenge 170 e

宇宙論の直観的理解

Page 224

最大力を使うと，オルバースのパラドクスを簡単に説明できる．仕事率と光度は同じ観測量を別の言葉で表現したものである．宇宙のすべての光度の合算値は有限である．つまり，すべての星から発せられる光やその他のエネルギーを，全部まとめても，有限である．宇宙が一様で等方的であるとしたら，宇宙を半分に切った平面を横切る仕事率の上限は $P \leqslant c^5/4G$ でなければならない．地球に到達する宇宙の光度は非常に小さくなり，夜空が暗くなる．仕事率の大部分は人間の目には感じない（その大部分は物質である）ので，実際に測定されている光度はこの計算よりさらに小さい．言い換えると，夜が暗いのは，自然のもつ仕事率の制限のためである．これは，星の寿命が有限であるとか，星の有限の密度，有限のサイズや宇宙の年齢や広がりが有限であるといった普通の説明と反するものではない．実際，これらのすべて説明を合わせると，仕事率は極限を超えられないということを意味し，これが複雑な形で繰り返されているだけである．これ以上簡単な説明をした書物はないだろう．

自然に最大力が存在するなら，一様性と等方性を考慮すると，観測できる宇宙は有限のサイズになる．その反対にあるのが，無限の大きさを持つ，一様で等方的な宇宙である．この場合，二つに割った宇宙は，(宇宙ができて十分の時間が経過しているとすると) 制限を超える力のために，互いを引き付けることになるだろう．この結果は，地球を中心とし，それを取り巻く宇宙を考え，その半径は光速に近い速度で減少してゆくとして計算できる．質量流の極限 $c^3/4G$ に到達するためには，質量流 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \rho A v$ が予言され，従って，

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho_0 4\pi R_0^2 c = \frac{c^3}{4G} \quad , \tag{127}$$

となり，フリードマンモデルで予言されるものとも一致する．WMAPによる宇宙背景輻射の精密測定によれば，現在の全エネルギー密度 ρ_0 (ダークエネルギーとダークマターを含む) と地平線の半径 R_0 は，ちょうど，その極限値に到達することを示している．最大力の制限は宇宙の観測されている大きさを説明できる．

また，有限の仕事率極限は，宇宙の有限年齢を導出できることを示唆している．説明できるか?

Challenge 171 s

三千年期における実験へのチャレンジ

地平線での力，地平線での仕事率，地平線での質量流についての直接的なテストがないのは，いままで，実験可能な環境下に地平線が存在しないためである．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

極限に近づくことは難しいが，これらの値は観測であれば可能であり，また，検証可能である．

実際，二重パルサーや二重ブラックホールの高精度な観測で，力の極限は観測できるかもしれない．このような系では，２つの星の精密な位置決定が可能である．最大力の原理には，位置の誤差 Δx とエネルギーの誤差 ΔE も間の関係が含まれている． Ref. 105 すべての系で，

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} \leqslant \frac{c^4}{4G} \,. \tag{128}$$

が成り立つ．例えば，1 mmの誤差に対しては，$3 \cdot 10^{23}$ kg以下の質量誤差になる．日常の測定ではこの関係は満たされている．実際，左辺は右辺より極めて小さいため，この関係について，ほとんど言及されることはない．直接，チェックを行うには，等号が成り立つような系のみが興味深い．二重パルサーや二重ブラックホールがこのような系なのだ．

いつか，銀河系の中心にあるようなブラックホールに落下する物質の量が測定されるかもしれない．そうなると，極限 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t \leqslant c^3/4G$ が直接的にテストされるかもしれない．

仕事率の極限によると，系が光速でエネルギーを放出する際に，最大の光度が達成されることを示す．実際に，最大の放出仕事率はすべての物質が可能な限り高速で放出されるときに達成される．物体の半径 R がブラックホールの半径（ある質量に対する最大の密度）より大きかったり，放出速度 v が光速より小さいと，放出仕事率 $P = c^2 M/(R/v)$ は最大値に到達できない．従って，最大の光度を持つソースは，最大密度を持ち，重力波や電磁波，また（多分）グルーオンのような最大密度を持ち，静止質量を持たない物を放出しなければならない．この極限を検出できる候補は，形成，蒸発，または融合過程のブラックホールである．

極限に到達している表面の候補は夜空である．夜空は地平線である．光，ニュートリノ，粒子や重力波の流れを合わせると，極限値 $c^5/4G$ に到達できると予測されている．もし，測定される仕事率が，(現在考えられているように) 極限値より小さいと，発見されるかもしれない新しい粒子のヒントを示すかもしれない．極限値を上回ったり足りなかった場合には，一般相対論が正しくないということなのかもしれない．これは，将来の興味深い検証実験だろう．

仕事率に極限があるということは，力の極限に近い積分強度を持つ波は平面波になりえないことを意味している．仕事率の極限は，(単位時間当たり，単位面積当たりのエネルギーとして表される) 強度 I と光速 c で動く波頭のサイズ（曲率半径）R の積に極限があることを示す：

$$4\pi R^2 I \leqslant \frac{c^5}{4G} \,. \tag{129}$$

どんな周波数，どんな種類の波を用いようとも，右辺に現れる値は非常に大きく，明らかに，この主張を実験的にチェックするのは難しい．もしかしたら，将来，重力波検出器，X線検出器，電波検出器や粒子検出器を用いた実験で，関係 (129) を精度よく検証できるようになるかもしれない．(これらの実験でどれが最初に極限を検証できるかを予言してみましょう) Challenge 172 e

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

力と仕事率の極限の実験による直接検証が存在しないことは，間接検証が，取り分け，重要であることを意味する．このようなテストでは，物質の運動やエネルギーを研究し，有名な力と仕事率の極限についての結果，つまり，一般相対論の場の方程式と比較することになる．これが，次のトピックである．

一般相対論のまとめ – および最小力

> “Non statim pusillum est si quid maximo minus est. *”
>
> セネカ

一般相対論には，単純な公理的説明がある．つまり，地平線力 $c^4/4G$ と地平線仕事率 $c^5/4G$ は最大の力であり，最大の仕事率である．これに矛盾する観測は知られていない．反証例も考えられない．一般相対論は，これらの極限値から得られる．さらに，この制限の存在は，夜の暗さや宇宙の有限性を意味する．

一般相対論を教える際，最大力の原理は言及すべき内容である．大学1年レベルや，もしかしたら，高校生に対しても，この原理から一般相対論を導入でかもしれない．必要な内容は最大力の原理と地平線だけである．時空の曲率は地平線の曲率の結果である．

最大力の考え方を用いると，重力の別の側面も導入できる．宇宙定数 Λ は最大力原理により決めることはできない（しかし，この原理を用いて，符号を正と決定できる）．現在の測定から，$\Lambda \approx 10^{-52}\,\mathrm{m}^{-2}$の結果が得られている．正の宇宙定数は負のエネルギー体積密度 $-\Lambda c^4/G$ を意味する．エネルギーと圧力は同じ次元を持つので，この値は，負の圧力に対応している．自然界の最小面積である（数値的に修正された）プランク面積 $2G\hbar/c^3$ を乗じると，力について，

Page 227

Vol. VI, page ??

$$F = 2\Lambda\hbar c = 0.60 \cdot 10^{-77}\,\mathrm{N}\,. \tag{130}$$

という値が得られる．これは．宇宙間隔 $1/4\sqrt{\Lambda}$ だけ離れた2つの（数値的に修正された）プランク質量 $\sqrt{\hbar c/8G}$ の間に働く力でもある．

式 (130) は自然界における最小の力と考えることができる．この推論の証明は最大力の場合ほど簡単ではない．今のところは，可能なのはヒントのみである．最大力同様，最小力も重力と両立しなければならないし，どんな実験とも矛盾してはならない．また，どんな思考実験とも相容れなければならない．手っ取り早いチェック方法としては，最小力から重力の宇宙定数が導出でき，最小力は不変であり，どんな実験とも矛盾しないことである．また，その値より小さい値を生成したり，測定されることがないことである．たとえば，2つの原子や2つのニュートリノといった2つの中性粒子が宇宙的距離離れた場合の，それらの間にはたらく重力は最小力よりずっと小さい．しかし，実験的にこれらの粒子が相互作用しているかどうかを検出することはできないだろう．その加速度は測定するにはあまりにも小さすぎる． 別の例として，最小力は宇宙のサイズの波長を持つ光子に含まれる単位長あたりのエネルギーに対応する．これ以上小さい力の測定を想像することは難しい，いや，おそらく不可能であろう．(そうでしょうか.)

Challenge 173 e

Challenge 174 d

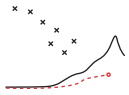
* ‘最大より小さいという理由のみで，無視できるものは何もない.’ ルキウス・アンナエウス・セネカ (Lucius Annaeus Seneca) (*c.* 4 BCE–65), 書簡 16, 100.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

もし，(完全には証明されていないが) 式 (130) が自然界で考えられる最小の力であるという結論に飛躍すると，宇宙定数を含めた一般相対論の完全理論が自然界の最大力と最小力の組み合わせにより定義できるかもしれない．

最大力の原理と一般相対論の両方ともが宇宙定数の値を決定するのに失敗している．それらを組み合わせるとそれが可能になる．この理論には2つの要求事項がある．まず，統合された理論も一般相対論と同じ力の極限値を予測しなければならない．第2に，統合された理論は宇宙定数を決定できなければならない．最小力についての推測式に $\hbar$ が現れることは，最小力が一般相対論と量子論の組み合わせにより決定されていることを示唆する．この示唆の証明や最小力の確認は一般相対論を超えるためのわれわれの登山の重要なチャレンジである．わたしたちの冒険の最後に，このことに立ち戻ろう．

ここまで来ると，一般相対論の結論やその場の方程式を詳細に学ぶ準備が出来上がった．まずは，日常の時空の曲率について，特に，運動の観測に注力することから始めよう．



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Chapter 5

最大速度は空間, 時間, 重力をどう変えるか

> Sapere aude.*
> ホラチウス (Horace) *Epistulae*, 1, 2, 40.

観測によれば，重力効果はエネルギーを輸送する．**われわれの重力についての記述では速度の極限を含むことになる．重力の式において，エネルギー輸送に極限の速度を考慮したものだけが重力を詳細に記述できる．アンリ・ポアンカレ (Henri Poincaré) は1905年に，すでに，重力の正確な記述にはこれが必要であることを述べている．しかし，関係式 $a = GM/r^2$ で表される万有引力では，速度が光より速くてもかまわない．例えば，万有引力では，a と r が観測者にどう依存するかも明確ではない．つまり，万有引力は正しくないのだ．アルバート・アインシュタイン (Albert Einstein) による一般相対論という正しい記述にたどりつくには，いくつかの先入観を捨てないといけない．

Ref. 120, Ref. 121

最大速度と重力を関連付けると，おもしろい結果をもたらす．真空空間が曲がり，動き，宇宙は有限の年齢になり，物体が永遠に自由落下をする．真空の空間は曲げられるが，鉄よりも堅固であることをまなんでゆく．さまざまな結論の奇妙さにもかかわらず，これまの実験でそれらは確認されている．

静止と自由落下

日常生活において，運動の反対は，例えば，眠っている子供や波を砕く岩のような静止物体である．他の物体により外乱を受けない物体は，いつも，静止している．日常世界の記述における静止とは速度ゼロのことである．ガリレオの相対性やアインシュタインの相対性では，静止とは慣性運動のことである．なぜなら，慣性観測者は，自分の運動を静止しているかどうかの区別がつかないからだ．つまり，慣性観測者の運動を阻害するものはない．波を砕く岩も，宇宙線として，銀河を横切る高速陽子も静止している．重力を含めると，静止をもっと一般的に定義することになる．

▷ 自由落下する観測者や物体は，どれも，静止していると主張できる．

Challenge 175 e

慣性的に運動するどんな物体も静止していると考えられるのなら， 自由落下するどんな物体も静止していると言えるはずである．このことを誰よりもよくわかっているのがジョゼフ・キッティンジャー (Joseph Kittinger) である．彼

* 「知恵を持つことに勇気を持て」 ホラチウスのフルネームはクィントゥス・ホラティウス・フラックス (Quintus Horatius Flaccus) , (65–8 BCE), 偉大なローマの詩人
** この文言の詳細な意味は簡単ではない. これらについてはpage 162とpage 189で議論する.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

は，1960年8月，31.3 km の高度の気球のカプセルから一歩を踏み出した．この
Ref. 122 高さにあっては，空気は非常に希薄で，自由落下開始後の1分間，浮かんで静止していると彼は感じた．驚いたことに，熟練したスカイダイバーにもかかわらず，自らが気球から遠ざかっていることを確信するために，仰向けになる必要があった．運動している感じがなかったにもかかわらず，彼は落下し，地上面に対し，274 m/s，つまり 988 km/h の速度にまで達したのだ．彼が何かを感じ始めたのは，最初の空気層に到達した時だった．この時，彼の自由落下が阻害されはじめたのだ．それから，4分30秒後，彼の特別仕様のパラシュートは開き，9分後に，ニューメキシコに着地した．

地球を回る宇宙飛行士や放物飛行をする飛行機内の乗客*のように自由落下をするすべての観測者，そしてキッティンジャーは，みんな同じ体験をする．すなわち，自由落下中に起きることと静止している時に起きるであろうこととの区別がつかない．これを等価原理と呼んでいる．これが一般相対論の出発点である．これにより，私たちがこれから出会うであろう最も精密で，最終的な静止の定義に導かれる．静止とは自由落下である．静止とは外乱のない状態，すなわち，自由落下である．

時空のある点で，全員が自由落下する観測者のグループは，特殊相対論の慣性観測者の概念を一般化したものである．つまり，運動はすべての慣性観測者だけではなく，すべての自由落下する観測者が互いに話が通じるように記述しないといけない．さらに，完全な記述には，重力とそれが作り出す運動が含まれないといけないし，どんな観測者も想像できるようなものでなければならない．一般相対論はこの目的に適ったものである．

最初のステップは，静止についての結果を別の言い方で表すことである．

▷ 真の運動は自由落下の対極にある．.

こんな書き方をすると，とたんに，質問が殺到するだろう．木や山はそもそも自由落下していない．そうするとこれらは静止していないのか？ どんな運動を
Challenge 176 s しているのか？ そして，もし，自由落下が静止なら，重量とは何なのか．最後の疑問から始めよう．

時計が重力について教えてくれること

Page 119 以前に，重力を最大力の影として説明した．しかし，これには，もっと日常に密接したほかの言い方がある．ウィリアム・アンルー (William Unruh) 好んで使
Ref. 123 う，すべての観測者にとって光速が一定であるとっ言葉には，ある単純な結論が含まれている：

▷ 重力は，場所が異なる時計の進み方を不均一にする．**

もちろん，この馬鹿げたようにみえる定義はチェックしておかなければならない．
Challenge 178 e 特殊相対論の際，異なる観測者が1つの状況について会話するというこ

* 最近このような飛行の予約が特別な旅行業者で可能になっている．
** 以下に示すように，重力は異なった場所では物差しの長さも変えてしまう．完全な記述のためには，二つの効果が両方とも必要である．しかし，地球上の日常生活では，長さの効果は時計の効果より小さく無視できるので，時計の効果だけで十分である．なぜかわかるか？ Challenge 177 s

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

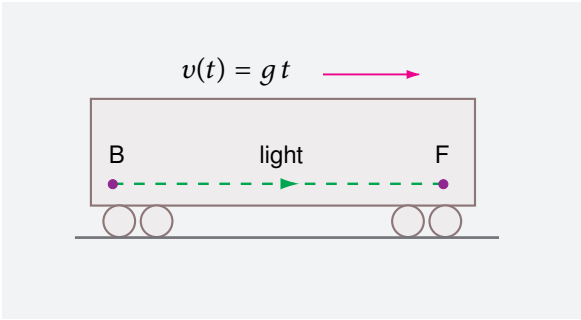


FIGURE 61 加速される列車またはバスの内部.

とをたびたび行ったが，この定義はそうではない．この定義によれば，互いにがっちりと固定された隣同士の同じ時計を同じ観測者が観測しても，重力場の中では，時間の進み具合が違うということを述べている．さらに，この差こそ，私たちが重力と呼んでいるものに，直接，関係している．この関係は，実験と推論という2つの方法でチェックできる．まずは，金もかからず，手っ取り早く，そして，おもしろい後者の方法から始めよう．

観測者は重力なのか一定加速なのかわからない．一定加速度の場合を考え，特殊相対論の章ですでに用いた論法を用いることができる．Figure 61に示すように，加速度gで進行方向に加速している長さ Δh の列車の後端から光が発せられとする．時間 $t = \Delta h/c$ 後に，光は列車の前端に到着する．しかし，この時間の間に，加速列車はさらに速度を増している．つまり，$\Delta v = gt = g\Delta h/c$ になっている．その結果，特殊相対論の議論の際に登場したドップラー効果のため，先端に到着する光の周波数 f が変化する．ドップラー効果の式を用いると，*

Page 52
Challenge 179 e

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{g\Delta h}{c^2} \,. \tag{131}$$

となる．周波数変化の符号は，光運動と列車の加速運動が同じ方向か反対方向かに依存する．実際の列車列車やバスバスでは，周波数変化は小さいが，測定可能である．

Challenge 181 s

▷ 加速は光の周波数変化をもたらす.

加速におけるこの第一の効果を重力の効果と比較しよう．

空間と時間の測定には光を使う．重力が存在する時，光に何が起きるだろう．最も簡単な例は光の落下または上昇である．起こるべきことを導くために，もう少し，詳細を追加する．Figure 62に示すように，上と下に付けられた輪の周りを質量を運ぶコンベアベルトを考えてみよう．降りてゆく灰色の質量の方がやや重い．この重い質量が真下に近づくと，– 図示されてはいないが –ある機構で過剰質量を光に変換する．この時の光のエネルギーは $E = c^2m$ に一致し，この光を上部に送る．** 上部では，軽い質量の1つが重さをもらい，下に降りる

Ref. 124

* 式$v = gt$ が成り立つのは非相対論的速度に対してのみである．しかし，この節の結論は，この近似により影響は受けない.
Challenge 180 e
** 特殊相対論でよく使うように，これから，「質量」といえば静止質量のことをいう.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

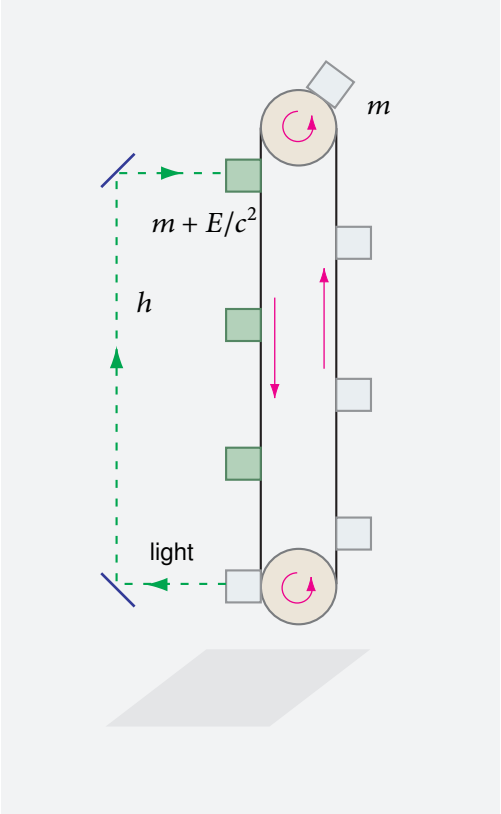


FIGURE 62 光の青方偏移と赤方偏移の必要性:なぜ, 木の下の方が緑になるか

までコンベアベルトを回転させる. この過程が繰り返される. *

下降してゆく灰色の質量はいつも重いので, ベルトは永遠に回り続け, エネルギーを常に生成できるように見える. しかし, エネルギー保存則というのは, この本の最初で述べたように, 私たちの時間についての定義を基礎にしているので, 過程全体としては不可能である. 上昇の時に, 光のエネルギーが変化することを考えないといけない. そのため, この過程を起こせる唯一の方法は, 下部で放出される光の周波数と違った周波数の光が上に到着することである. **

Vol. I, page ??

つまり, 次のように言うことができる

▷ 光が上に上がってゆくと重力的に赤方偏移する.

同様に, 木のてっぺんから光が根元にいる観測者に向かって降りてくると, 光は青方偏移する. このため, てっぺんは, 木の根元と比べて色的に暗くなる. 光速不変と重力を考え合わせると, 木の高さ方向に緑の影が変化してゆくことを意味する. *** この効果の大きさはどの位あるのだろうか. 図 から導かれる結果は公式 (131) からわかる. つまり, 加速列車の光と重力下で移動する光は全く同じ状況下にあるといえるので, 自分で確認してみてください. 公式から,

Challenge 184 e
Challenge 185 s

* 100 % 効率であればこの過程を実施することは可能か.

Challenge 182 s

** 光のエネルギーと周波数の関係は量子論の議論の所で説明する. しかし, 光のエネルギーは強度と周波数に依存することを, 古典電気力学の分野ですでに知られている.

Vol. IV, page ??

*** 日 光を含めて考えるとこの議論は変わるか?

Challenge 183 ny

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

地上付近での周波数の相対変化量は$1.1 \cdot 10^{-16}$/mしかない．木の場合，少なくとも，普通の光では，いわゆる，重力赤方偏移または重力ドップラー効果は小さすぎて，観測できない．

1911年，アインシュタインは，太陽から放出される光の有名なフラウンホーファー線を色のマーカーとして使用し，赤方偏移を測定し，高さにともなう周波数citesungrshの変化をチェックする方法を提唱した．シュワルツシルト (Schwarzschild) らによる最初の実験結果は，高温の所での色変化を引き起こす他の多くの効果のため，はっきりせず，むしろ，否定的であった．しかし，1920年と1921年に，レオンハルト・グレーベ (Leonhard Grebe) とアルベルト・バッヘム (Albert Bachem)，また，それとは独立にアルフレッド・ペロー (Alfred Perot) が,注意深い実験により，重力赤方偏移を確認した．その後，技術的進歩により，地上でこの効果を測定できるくらいまで，測定が容易になった．1960年，メスバウワー効果の古典的な実験で，パウンド (Pound) とレプカ (Rebka) は，大学の塔で，γ 線放射を用いて，重力赤方偏移を確認した．

Vol. IV, page ??
Ref. 126
Ref. 127

しかし，私たちの思考実験はもっと多くのことを教えてくれる．特殊相対論の場合と同じ論法を使ってみよう．つまり，色変化は，列車の前方部と後方部では時計の進み方違うように，異なった高度では，時計は異なった進み方ををすることを意味している．その時間差 $\Delta\tau$ は，高さの違いΔh と重力加速度 g に依存すると予測されている．つまり，

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{g\Delta h}{c^2} \,. \tag{132}$$

である．簡単に言えば，

▷ 重力下にあっては，時間は高さに依存する．.

Challenge 186 e

つまり，高さは加齢を速める．これを確認できるか．

1972年，4個の精密時計を飛行機で搭載し，同じ時計を地上に1個残すことで，ハーフェル (Hafele) とキーティング (Keating) は，これらの時計が，式 (132) に従い，高度が違うと，異なった進み方をすることを示した．続いて，1976年，ベソット (Vessot) のチームは，正確なマイクロウェーブ発振器と振動子であるメーザーを基本にした時計を，ミサイルに搭載し上方へ打ち上げた．このチームはミサイルの中のメーザーと地上のメーザーを比較し，上式を再度確認した．1977年，BriatoreとLeschiuttaは，トリノの時計は，モンテローザ山頂の時計より，ゆっくり時を刻むことを示した．彼らは，地球上では，100 m高くなるごとに，1日に約1 nsだけ，速く年を取ることを確認した．このことは，その他の惑星，太陽や他の恒星など，実験が行われたすべての系で確認されている．

Ref. 128
Ref. 129
Challenge 187 e

これらの実験は，時計の機能の不具合により時間が変わったのではないだろうか．時間をとって，この疑問を解決してください．一言だけ付け加えるが，重力は確かに光の色を変える．従って，実際，時間を変える．ここでは，時計の精度は論点ではない．

Challenge 188 e

まとめると，重力は異なった高度にある時計の進み方を変えてしまう．また，この結果は，低高度で観測する人も高高度で観測する人も同じ結論に至る．両者とも，高い場所の時計ほど速く時を刻むことに同意する．つまり，重力が存在すると，時空は特殊相対論のミンコフスキー幾何学で記述されなく，もっと，

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

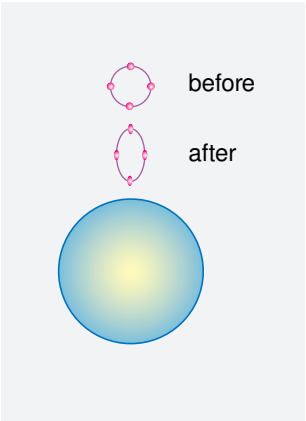


FIGURE 63 潮汐効果： 落下する時, 物体が感じるただ一つの効果

一般論的な幾何学である. 数学的な言い方をすれば, 重力がある場合はいつも, 事象間の4元距離 ds^2 は, 重力がない場合の式とは異なる:

$$ds^2 \neq c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \,. \tag{133}$$

これから, 正しい式を導く.

時間が高度に依存するという重力の見方は理に適っているのだろうか? 答えはノーである. これからもっと変なことがでてくる！光速はすべての観測者にとって同じであるので, ほかにも, 言えることが多くある. 時間が高度に依存するなら, 長さもそうなるに違いない. もっと正確は, 異なった高度で時計が異なった進み方をするなら, 高さの異なった物差しの長さも違うはずである. このことを, 異なった高度にある水平の物差しの場合で確認できるか. Challenge 189 s

高さとともに長さが変わるなら, 地球を取り巻く円の周長も, $2\pi r$ では表すことができない. 同じような不一致を, バスケットボールの表面を這いながら円周をと半径を測るアリも気が付くであろう. 実際, 重力があると, 人もバスケットボール上のアリと同じ状況下にあり, 唯一の違いは, 周長を2次元から3次元に置き換えられることである. つまり, 重力が存在すると, 空間が曲がるという結論になる.

重力について, 潮汐が教えてくれること

自由落下の最中, キッティンガー (Kittinger) は自分自身の慣性系を指定できた. 実際, 彼は静止していると感じた. このことは, 加速と重力を区別できないことを意味しているのだろうか. 答えはノーで, 区別可能である. 二人 (またはそれ以上) の落下する観測者, または一人の観測者の2つの部分を比較するだけでよい.

キッティンガーは, 地球の反対側で落下する仲間に対しても慣性である系を見つけ出すことはできないだろう. Challenge 190 e このような共通の慣性系は存在しない. 一般に, ある質量の近くを自由落下する異なった二人の観測者がいたとき, 二人を*1*つの慣性系で記述することはできない. 重力場中を落下している場合でも, すぐ隣の観測者でも, 共通の慣性系を見つけ出すことはできない. 二人の近接した観測者は落下中にその相対距離が変わるのを観測する. (なぜか?) Challenge 191 s 同様のことが軌道運動している観測者に対しても起きる.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

地球を回る軌道上の閉じられた部屋の中の人や質量もどんな力も，重力も感じない．しかし，部屋に複数の粒子があると，それらは，厳密には，場所に応じて異なった振る舞いをするだろう．二つの粒子が全く同じ軌道にある場合にのみ，同じ相対位置関係が保てる．ところが，一方の粒子が他方の粒子に比べ，高い位置にあったり，低い位置にあると，時間が経つと互いに離れてゆく．もっとおもしろいのは，軌道上の一個の粒子は，横にずれると，中心位置の周りで振動する（確認できるか.）．

Challenge 192 e

重力があると相対位置が変わる．この変化は，Figure 63に示すような別の効果を呈する：自由落下する広がりを持つ物体は両側から押しつぶされる．この効果から，自由落下は場所によって違うという重力の基本性質もわかる．そうです．物体が縦長に押しつぶされるのは，潮汐を引き起こすのと同じ効果である．実際，海の膨れというのは，月の向かって落下する際，地球がその方向に延びるように押されるのと同じ効果である．万有引力のこの効果から，重力の本質は潮汐効果に見て取れると断言できる．

Vol. I, page ??

Ref. 130

言い換えると，重力が単純になるのは局所的な場合においてのみである．局所的な場合にのみ，加速のように見える．局所的な場合にのみ，キッティンガーのような落下観測者は静止していると感じる．点状観測者のみそうなる．空間の広がりを考えると，その時点で，潮汐効果が生じてしまう．

▷ 重力は潮汐効果を生じる．

潮汐効果がない場所には重力がないことを意味する．潮汐効果は，時間が高度に依存するということが日常生活に与えた結果である．これは，光速の不変性から導かれた美しい結論だと思いませんか．

原理的に，キッティンガーは，自由落下の際，たとえ目をつぶっていても，自分自身に集中していれば，重力を感じることができただろう．もし2つの手の間の距離を測定していたなら，間隔が微妙に小さくなり，落下していることを教えてくれただろう．この小さな間隔の減少により，キッティンガーは奇妙な結論を導くだろう．慣性的に運動している2つの手は，2本の直線に沿い，いつも，同じ距離を保つはずである．距離が変わるということは，彼の周辺の空間で，平行で始まった2本の線がそうなってないと結論付ける．キッティンガーは，自分の周りの空間が，地球面と似ていると結論付けるだろう．地球の表面では，北に向け引いた2本の平行線が，距離が変化し，北極で交わる．言い換えると，キッティンガーは，自分が曲がった空間にいると結論付けるだろう．

自分の手の間隔が変化することを知ったキッティンガーは，空間の曲がりが高さとともに変化しているという結論にいたる．物理空間は，一定曲率を持つ球とは別の物である．物理空間はもっと複雑である．ただ，この効果は極端に小さなもので，ヒトは感知することはできない．実際には，キッティンガーは実際は何も検出できなかったはずだ．しかし，結論は正しい．重力が存在すると，時空はミンコフスキー幾何では記述できない．潮汐力には時空の曲率が含まれる．

▷ 重力は時空の曲率である．

これは光速不変から，最終的に学ぶ重要な事柄である．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

曲がった空間とマットレス

> Wenn ein Käfer über die Oberfläche einer Kugel krabbelt, merkt er wahrscheinlich nicht, daß der Weg, den er zurücklegt, gekrümmt ist. Ich dagegen hatte das Glück, es zu merken.*
>
> アルベルト・アインシュタイン (Albert Einstein) が有名になった理由についての息子エドゥアルトの質問への答え

1919年11月7日，アルベルト・アインシュタイン (Albert Einstein) は一躍有名になった．この日，ロンドンのタイムズ紙は，南アメリカの2カ所への遠征旅行の成果についての記事を掲載した．その見出しは「科学の革命 /宇宙の新理論 /ニュートンの考えは崩れ去った」．この遠征で，(最初ではなかったが) 基本的に $a = GM/r^2$ で記述される万有引力の理論が誤りで，空間が曲がっていることが明確にしめされた．これにより，世界が熱狂し始め，アインシュタインは世界一の天才として紹介された．「曲がった空間」の見出しがあちこちで見られた．一般相対論についてのアインシュタインの論文が一般向けの雑誌に掲載された．人々は，タイムに載せられたテンソル形式とギリシア文字の添え字で記述された一般相対論の場の方程式を読もうとした．後にも先にも，物理学者にこんなことが起きたことは，他になかった．この興奮の原因はなんだったのだろうか．

この南半球への遠征では，アインシュタインにより提唱された実験が行われた．高さにより時間が変化することの検証の他に，空間の曲率を測定する多くの実験についてアインシュタインは考えていた．最終的に彼を有名にした実験で，アインシュタインが提唱したのは，日食の時にのみ可能な太陽の近くの星の写真撮影を行い，それを太陽から遠く離れた夜間に撮影した同じ星の写真を比較するこであった．一般相対論の方程式から，アインシュタインは，太陽近縁の星の像は，1.75″(1.75 秒)だけ位置がずれると予想した．これは万有引力で予想される値の2倍である．この予言は1919年に初めて確認され，万有引力説が退けられた．この結果は，本当に，空間が曲がっていることを意味しているのだろうか．実は，この結果だけでは，そうは言えない．実際のところ，ポテンシャルが逆二乗則からずれているような場合でも，日食の実験の結果を説明できてしまう．しかし，日食実験が唯一の実験ではない．私たちは，すでに，高度により時間が変わることを知っている．異なった高度の観測者が自分の近くで光速値を測定すれば，同じ値 c という観測結果が得られることは実験によりわかっている．しかし，これらの実験によると，もし，ある観測者が別の観測者の位置の光速を測定すると，自分の時計の進み方が違うので，c とは違う値を得ることも示している．このジレンマに対する答えは一つである．時計のように，物差しも，あらゆるところで光速が一定になるように，高さとともに変化する．

Ref. 131
Vol. I, page 22
Ref. 132

光速が一定で，時計と物差しが高さに応じて変化するとすると，空間は質量の近傍で曲がるという結論になる． 20世紀の多くの物理学者が，重力が存在するところで本当に物差しが様々な変化をするのかを調べた．そして，実際，惑星，測定可能な何百という恒星，何十という銀河の周りで曲率の測定が行われた．そして，以下で詳しく述べるような，質量の周りで曲率についての間接的

Challenge 193 e

* '球の上を歩く虫は，多分，自分が歩いた道は曲がっていると気づかないだろう．私は，幸運にも，そのことに気付いたのだ．'

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

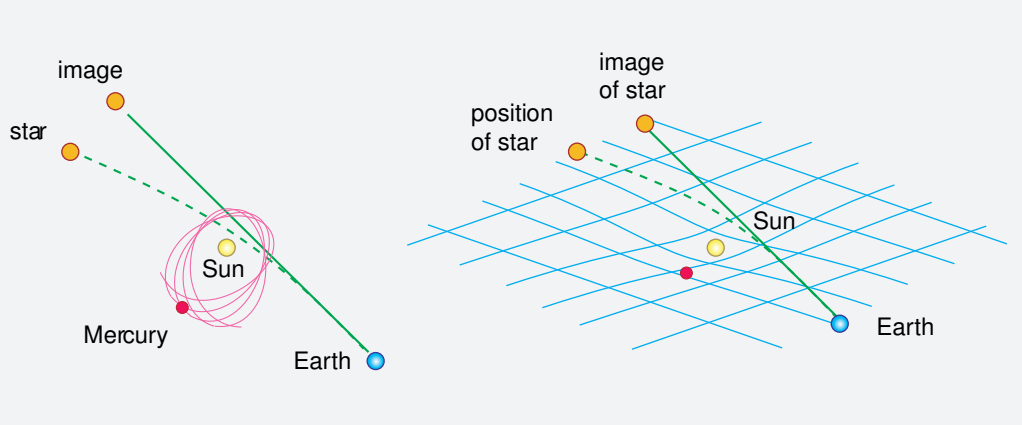


FIGURE 64 空間のマットレスモデル：球状質量の近くでの光ビームや衛星の経路

な多くの効果が観測された．すべての結果が，質量の周りでの時空や空間の曲率が確認され，さらに，その曲率の値は一般相対論で予測される値であることを確認した．つまり，質量の周辺では，場所ごとに，また，方向ごとに，物差しのサイズが実際変わるのだ．Figure 64にそのイメージを図示する．

ただし，多くの教科書でよく見る右の図は注意しないと誤解をする可能性がある．ある物体の周りのポテンシャルを描いたものと勘違いするのだ．実際には，曲率とポテンシャルを別々に表現した図を描くことはできない．(なぜか？) これから，小さな曲率に対してはポテンシャルだけで物差しの長さの変化について説明できることを見てゆく．このように，少なくとも，弱い重力の場合には，この図はごまかしとはいえないが，重力の値が大きくその値が変化する場合には，ポテンシャルが定義できなくなり，重力の記述法としては曲がった空間を使うしかなくなる．つまり，空間を，質量が変形を引き起こす一般化されたマットレスのように考えるのがるのが，理に適った時空のモデルである．質量が動くと，変形もそれとともに動く．

Ref. 133

Challenge 194 s

テスト粒子の加速はマットレスの曲率にのみ依存する．テスト粒子の質量に依存するのではない．だから，マットレスモデルはすべての物体がなぜ同じように落下するかを説明しているのだ．(昔は，これを 慣性質量と重力質量の等価性とよんでいた.)

このように，空間はあらゆるものを取り込んだ摩擦のないマットレスのように振る舞う．私たちはマットレスの中で生きているが，日常，それを感じることはない．質量のある物体はマットレスのフォームをその方向に引っ張り，マットレスの形を変形させる．(マットレスはエーテルを想起させるかもしれないが，心配する必要はない．物理学者は，真空と区別できないエーテルの考えを捨てている.)

Vol. III, page ??

重力が曲がった空間を意味しているなら，動き始める車の人のように加速を受けている観測者も，空間の曲がりを観測できなければならない．しかし，日常生活の加速度や大きさは小さすぎて，普通の生活では，このような効果には気が付かない．この予測をチェックする感度のいい実験を考え出せるだろうか．

Challenge 195 s

曲がった時空

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Figure 64は空間の曲率のみを示しているが，実際は，時空全体が曲がっている．空間と時空の両方をどのように記述するか，そしてその曲がりをどうやって測るかについて簡単に述べる．

まずは，曲がった時空の考え方を用いて，自然を記述することからとりかかろう．Figure 64の場合，事象を記述する最良の方法は，無限に遠い空間位置に置かれた時計の示す時刻 t を使用することである．これにより，中心の質量からの距離により異なった進み方をする時計の問題を回避できる．動径座標 r に対して，空間の曲率の問題を避ける最も現実的な選択は，中心物体を取り囲む周長を 2π で割った値を使用することである．時空の曲がった形は，近接する2点の座標 (t, r) と $(t + \mathrm{d}t, r + \mathrm{d}r)$ の時空間距離 $\mathrm{d}s$，または，腕時計時間 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s/c$ で記述するのがもっともよい．すでに，述べたように，重力存在するときの状態を，球面座標を用いて書くと

Page 130

$$\mathrm{d}\tau^2 = \frac{\mathrm{d}s^2}{c^2} \neq \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2/c^2 - r^2\mathrm{d}\varphi^2/c^2 \,. \tag{134}$$

のようになる．ここで，不等号は，時空が曲がっていることを表している．実際，高さにともなう時間の違いの実験から，球状質量の周りの時空距離は，

$$\mathrm{d}\tau^2 = \frac{\mathrm{d}s^2}{c^2} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{c^2 - \frac{2GM}{r}} - \frac{r^2}{c^2}\mathrm{d}\varphi^2 \,. \tag{135}$$

で記述されることが確認されている．この式は発見者の一人にちなんで，シュワルツシルト計量と呼ばれている．* 計量 (135) は，球状非回転質量の周りでの時空の曲がった形状を記述している．これは地球や太陽のよい近似になっている (なぜその回転は無視できるのか.) ．式 (135) は，質量 M で半径 R の質量物体の重力の強度を

Challenge 196 s

$$h = \frac{2G}{c^2}\frac{M}{R} \,. \tag{136}$$

で定義される無次元数 h で評価できることを示している．この比率は，特殊相対論の平坦な状況からの長さと真空の変形で重力ひずみを表したもので，重力が存在することで時計がどの位遅れるかも決めている．(比率は，また，可能性のある地平線からどの位離れているかもあらわしている.) 地球表面上での，比 h は $1.4 \cdot 10^{-9}$ という小さい値である．一方，太陽はもう少し大きい $4.2 \cdot 10^{-6}$ という値になる．現代の時計の精密さをもってすれば，このような小さな効果も簡単に検出することができる．時空の曲がりの様々な結果や利用については，あとで，簡単に述べる．

質量が，極めて集中し，特に，その半径が，いわゆる，シュワルツシルト半径

$$R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2} \,, \tag{137}$$

* カール・シュワルツシルト (Karl Schwarzschild) (1873–1916), ドイツの著名な天文学者で，一般相対論を最初に理解した一人である．アインシュタインが場の方程式を発表したほんの数か月後の1915年の12月に，彼はこの公式を発表した．彼は42歳という若さで早逝し，アインシュタインを失望させた．私たちはこの式を，後に，一般相対論の場の方程式から，直接導出する．他に，ローレンツの学生であったヨハネス・ドロステ (Johannes Droste) も計量を発見したが，アインシュタインは彼のことを知らなかった．

Ref. 134

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

に等しくなると，シュワルツシルト計量が奇妙な振る舞いをするようになる．すなわち，その場所で時間が消失するのだ．（t は無限遠の時計であることを思い出してください.）シュワルツシルト半径の所の腕時計時間は（無限遠のところから見ると）止まってしまっている．そして，地平線が現れる．正確に何が起きるかは後述する．この状況はよくあるものではない．地球程度の質量のシュワルツシルト半径は8.8 mmで，太陽のシュワルツシルト半径は3.0 kmである．日常生活のシステムの物体の大きさは，どれも，シュワルツシルト半径より大きいことをチェックしてみてください． シュワルツシルト半径を実現している系のことをブラックホールと呼ぶ．これについての詳細は後で調べる．一般相対論によれば，自然界にはシュワルツシルト半径より小さい系はない．言い換えると，式 (136) で定義される比hは1以上にはなりえない．

Page 251
Challenge 197 e
Ref. 135
Page 247

まとめると，いままで述べてきたことから，質量は曲率*curvature*を生成することが明らかになった．そして，特殊相対論からわかっている質量エネルギーの等価性から，結果的に，どんなタイプのエネルギー運動量であっても，それが存在すると，空間が曲げられる．たとえば，光も時空を曲げる．しかし，私たちが作れる最も高エネルギーの光でも，質量にすれば非常に小さいもので，曲がりは測定できないほど小さいものである．熱でも時空を曲げる．しかし，ほとんどの系で，熱は全質量の10^{-12}の割合しかなく，従って，曲率への効果は測定不可能で，無視できる．それでも，エネルギーは時空を曲げることを，実験的に示すことは可能だ．大部分の原子で，質量のかなりの部分が正に帯電した陽子の静電エネルギーによるものである．1968年，クロイツァー (Kreuzer) は，浮遊質量を用いた巧妙な実験で，エネルギーが空間を曲げることを確認した．

Ref. 136

空間曲率と時計の進み方の違いは同じことを意味していることは導くのは簡単である． 二つの曲率を合わせて，重力が存在すると，時空が曲げられるという結果になる．

Challenge 198 e

考え方のつながりをまとめておこう．エネルギーは質量に等価である．質量は重力を生む．重力は加速に等価である．加速は位置に依存する時間である．光速は一定だから，エネルギー運動量は時空を曲げる．これが，一般相対論の最初の半分だ．

曲率の測定方法，曲率のエネルギー運動量から計算方法，測定結果と計算結果を比較からわかることについての説明をこれから行う．観測者により曲率値が違うこともわかってくるだろう．一般相対論では，ある視点を別の視点へ関係づける変換の組，つまり，微分同相写像対称が異なった観測者間の測定結果の関係を教えてくれる．

物体が運動するので，もっと多くのことが言える．質量の近くでは時空が曲がっているだけでなく，質量が通過するとそれは跳ね返る．言い換えると，一般相対論は，時空だけでなく，空間も弾性があることを示していうる．といっても，鋼鉄と比べると相当硬い．空間の一片を1%曲げるには，鉄道のレールを1%.曲げるより，ずっと，大きなエネルギー密度が必要である． 時空の弾性から導かれるさまざまなおもしろい結論が，これから少しの間，私たちをとりこにするだろう．

Ref. 137
Challenge 199 ny

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

光速と重力定数

> Si morior, moror.*
>
> 古言

重力をもっと正確に理解してゆこう．重力についての理論的実験的知識は2つに集約できる．第1の原理は，

▷ 物理系の速度 v には上限界があり，すべての観測者にとって，

$$v \leqslant c \tag{138}$$

である．ここで，c は光速を表す．

第1の原理に従う理論，つまり，特殊相対論に，重力の性質を表す第2の原理を追加すると一般相対論に拡張できる．この原理はいろんな言い方があるが，実は，同じことを言っている．まずは，

▷ すべての観測者にとって，ある系の力 F は

$$F \leqslant \frac{c^4}{4G}\,, \tag{139}$$

で，制限を受ける．ここで G は重力の万有定数である．

つまり，自然界には最大力があるということである．重力は質量を引き寄せるが，その力には限界がある．これを，別の言い方であらわすと，

Challenge 200 e

▷ すべての観測者にとって，質量 M の系のサイズ L は

$$\frac{L}{M} \geqslant \frac{4G}{c^2}\,. \tag{140}$$

で，制限される．

または，質量系は同じ質量の非回転ブラックホールより圧縮することはできない．重力の原理は，次のような言い方もできる：

▷ すべての系に対し，放出仕事率 P は，

$$P \leqslant \frac{c^5}{4G}\,. \tag{141}$$

で，制限される．

つまり，自然には最大仕事率が存在する．

* ‘静止したら，死ぬ．’ これが鳥類パラダイスのモットーである．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

今，述べた3つの制限は，互いに，同じことを表現している．例外は知られていないし，実際にそうなのである．これらの制限は，非相対論的な場合には，万有引力に含まれしまう．つまり，これらの制限は，重力とは，つまり曲率とは何か，そして，実際，それが どんな振る舞いをするのかを教えてくれる．これらの制限から，あらゆる時空点での，すべての状態の曲率が決定される．すでに述べたように，最後の3つの原理と速度の制限を合わせると，一般相対論のすべてを含められる．*

Page ??

たとえば，重力赤方偏移は，長さ質量比についての普通の制限値（140）と一致することを示せるか．

Challenge 201 ny

ちなみに，光速 c を含む公式は，どんなものでも，特殊相対論が基礎にあり，そして，公式が重力定数 G を含んでいるなら，それは万有引力に関係している．もし公式が c と G の両方を含んでいるなら，それは一般相対論の記述である．本章ではこの結びつきに照明を当てる．

私たちの登山では，これまで，運動を精密に記述するには，すべての可能な観点，性質，差異，それらの間の変換について明らかにすることが必要であることを学んだ．これからは，例外なく，あらゆるの観点が許される．つまり，誰もがほかの誰にでも意味を伝えることができる．つまり，ある観測者が，重力を感じていようとも，自由落下していようとも，加速されていようとも，慣性運動していようとも，それは関係ない．さらに，左と右を入れ替えた人たち，上と下を入れ替えた人たち，太陽は地球を周回している人たちも，彼ら同士の間でまた私たちと語り合えるにちがいない．ここには，特殊相対論よりもっと多くの見方の変換の組が存在する．これが，一般相対論を，難しく，同時に魅力的なものにしている．そして，すべての観点が可能になると，そこで得られる運動記述は完全なものになる．**

空に投げた石はなぜ地球にもどるのか – 測地線

> 天才とは可能な限り最短の時間ですべての起こりうる誤りをおかす人である．
>
> 作者不詳

特殊相対論の議論の中で，2つの事象間をつなぐ慣性運動や自由浮遊運動は，固有時間が最長になるような運動であることがわかった．重力がない場合，この条件を満たす運動は直線運動になる．一方，光線は直進するものであるという考え方に慣れている．実際，エッジの直線性をチェックするのに，それを見通すというやり方を使ってきた．物理座標系の軸を描くときは，光線の描く経路や自由運動する物体の経路を想像する．

Page 79

Vol. I, page ??

重力がなければ，物体の経路と光の経路は一致する．しかし，重力が存在する場合には，投げ上げた石が示すように，物体と光は同じ経路をたどらない．光は，空間的な直線をもはや定義しない．重力下では，光も物体も曲げられる．違うのは曲げられる程度である．しかし，本来の考え方に変更はない．つまり，重力がある場合でも，物体は固有時間が最も長くなる径路ををたどる．物質にとって，このような経路を時間的測地線という．光に対しては，この径路を光的とか ヌル測地線と呼ぶ．

* この啓蒙的なアプローチは伝統的な方法ではない．本著者により始められたと考えられる．英国の物理学者 ゲイリー・ギブソン (Gary Gibbons) も同様の方法を開発した．

Ref. 103

** 量子論とよばれる小さなずれを考えなければ，そうなるだろう．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

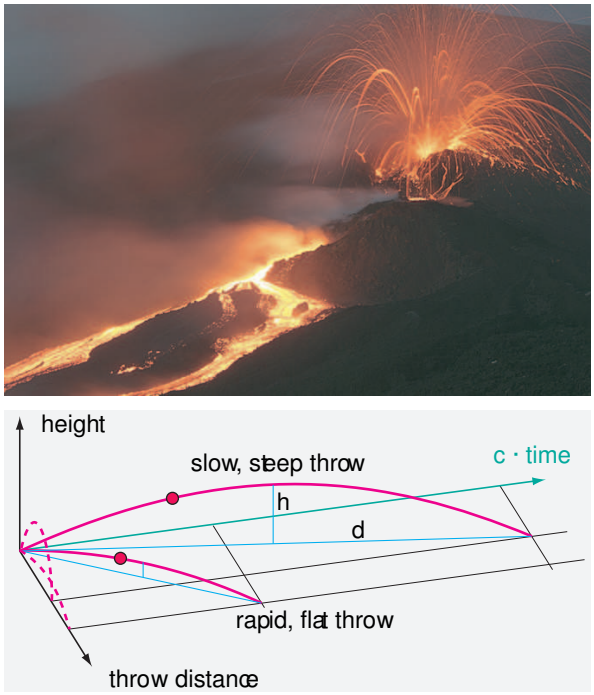


FIGURE 65 飛んでいる石の経路は，その速度や角度とは無関係に，時空の中で同じ曲率を持つ．(写真© Marco Fulle)

測地線は，時空内で最大長を持つ曲線である．これは球表面のような，純空間では，測地線が最短長になるのと対照的である．

簡単に言えば，石は測地線に従い運動するの，落下する．さて，この内容について，考えてみよう．石は慣性観測者にとって，固有時間が最大になるように運動するため，キッティンガーのような自由落下観測者にとっても，最大時間にならなければいけない．落下径路と測地線の等価性は，最低，整合性がある．

Page 147
Challenge 202 e
以下で議論するように，もし，落下を地球の表面が近づく結果とみるならば，落下は可能な限り長い固有時間であることを，直接，導出できる．自由落下は測地線に沿った運動なのだ．

先に述べたように，重力は最大力の存在から導ける．この結論は次のように考えることができる．中心物体と衛星間の重力による引力が，実際のものより強いとしたら，ブラックホールはもっと小さいものになるだろう．つまり，この場合，最大力や最大速度はブラックホールに近づくことで超えることができるようになるだろう．一方，重力が小さいと，2つの物体が相互作用できず，物理系を形成できないような観測者が存在するようになる．まとめると，最大力 $c^4/4G$ は，万有引力を意味する．すべての物体は重力を通して引き付けあうということと $c^4/4G$ の値の最大力があるということの差はない．しかし，同時に，最大力の原理は，物体が測地線に沿って運動することも意味している．これを示せるか．

Challenge 203 ny
実験による検証にもどろう．落下が曲率の結果だとすると，投げられたすべての石の径路，つまり，地球近傍の落下は，時空の中で同じ曲率を持つに違いない．平行に，垂直に，すばやくまたはゆっくり石を投げてみてください．Figure 65に示すように，時空内で，すべての経路は高い精度で円弧で近似でき

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 204 ny る． すべての経路は，

$$r = \frac{c^2}{g} \approx 9.2 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}\,. \tag{142}$$

で与えられる同じ曲率半径 r を持つ．小さな曲率に対応するこの大きな半径値のため，私たちは，日常生活でこのことに気が付かない．日常生活で石が描く放物線軌道は，4次元空間における基本的な曲率を3次元空間に投影したものである．重要なことは，曲率値は投げ上げ動作の詳細に依存しないことである．実際，この単純な結果は，アインシュタインより1世紀前から，一般相対論のアイデアを人々に暗示していた．見落としていたのは，極限の速度としての光速の重要性に気付かなかったことである．どんな場合でも，この簡単な計算で，落下と曲率は結びついていることを確認できる．以前に述べ，期待されるように，高度が大きくなると曲率は小さくなり，最後には，地球から無限の遠方でゼロになる．自由落下のすべての経路の曲率は同じで，すべての経路は最小作用の径路であることがわかったので，それは，また，測地線である．

落下を，時空の曲率の結果として記述すると，測地線の記述ですべての性質を再現することができるはずである．特に，小さな速度で投げ上げ戻ってくる石や，高速で投げ脱出する石を記述できるだろう．これを空間曲率で導けるか．

Challenge 205 ny

まとめると，「重力場」で自由落下する粒子の運動は，特殊相対論の自由粒子の運動と同様に変分原理で記述できる．つまり，固有時間 $\int \mathrm{d}\tau$ が，最大になるような径路をたどる．これは，時空点 A から時空点 B へ自由落下する粒子は，

$$S = -c^2 m \int_A^B \mathrm{d}\tau\,. \tag{143}$$

で示される作用 S を最小にするように落下すると言いかえることができる．これで，物体の自由落下はすべてわかる．結果的に，自由落下からずれると若さが保てる．ずれが大きいほど，より若くいられる．

Page 275 後で述べるが，自由落下の最小作用の記述は極めて精密に検証することが
Ref. 138 可能で，実験からのずれは今まで確認されていない．また，自由落下については，一般相対論と万有引力の予測値が，光速に近くなった粒子や高密度の中心物体で違いが生じてくる．二つの予測値が異なると，くなると違ってくる，一般相対論が正しくて，万有引力やその他の記述が誤っているというのが，これまでの実験の結果である．

すべての物体は測地線に沿って落下する．これは重要なことを教えてくれる．物体の落下はその質量に依存しない．測地線とは，時空の中の「レール」のようなもので，物体がどのように落下するかを教えてくれる．つまり，時空は，単一の巨大な曲がっている物と考えることができる．時空は「無」ではない．思考できるものである．このものの形状により，物体がどのように運動するかがわかる．従って，時空は知覚できないマットレスのようなものである．このゆがんだマットレスにより，物体を測地線の網目にそって落下させる．

さらに，異なった物質からなる物体の落下と比べることで，結合エネルギーは，質量と同じように落下する．結合エネルギーの割合は物質により異なる．
Challenge 206 s (なぜか.) たとえば，空気のない月面上で，宇宙飛行士が鉄と羽毛を落下させると，それらは，互いに隣り合って，同じように落下する．物質構成に依存し

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Ref. 139 ないことは，何度も検証確認されてきた．

光は落ちるか

どうやって，輻射は落ちるのだろうか．どんな輻射でも同じだが，光も静止質量を持たないエネルギーである．それは極端に高速な光物体の流れのように運動する．従って，万有引力から最も明確にずれるのは光である．では，どのようにして光は落下するのだろうか．光は速度を変えることはできない．光が垂
Page 127 直に落下するとき，以前に見たように，色が変わるだけである．しかし，光は方向を変えることもできる．相対論の考え方が現在のようになる前の1801年に，
Ref. 140 プロシャの天文学者 ヨハン・ソルドナー (Johann Soldner) は，万有引力により，質量の近くを通過する光は曲げられることを理解していた．彼は，その偏
Vol. I, page ?? 向角が物体の質量と通過距離にどう依存するかを計算した．しかし，19世紀にあっては，この結果を検証できるものはいなかった．

光はエネルギーを持ち，エネルギーは質量を持つ．光が自ら偏向するのは空間の曲がりの証明にはならない．一般相対論も質量のそばを光が通過すると曲げられことを予言したが，それは古典的なソルドナーの値の*twice*の量になる．これは，大きな質量の周りの空間の曲率が万有引力の効果に追加されるからである．光の曲がる値が，一般相対論の予測と一致するなら，空間曲率確認したことになる．観測値が予測値と一致すれば，これが確かめられたことになる．
Page 150 詳細は後で述べる．

単純に言えば，質量は重力を感じる必要はない．エネルギーが感じればじゅうぶんなのだ．質量とエネルギーの等価性に関するこの結果は，一般相対論を学ぶ際の第2の性質になる．特に，光は重さでみると軽いものではなく，重い．地球近傍での光の曲率は，石と同じくらいあることを，式142) で説明できるか
Challenge 207 ny .

まとめると，すべての実験から，質量だけではなく，エネルギーも，その形 (束縛や自由エネルギー) や相互作用 (電磁気や核) がなんであっても，測地線に沿って落下する．さらに，輻射の運動から時空が曲がっていることが確認できる．

すべての粒子は，質量や電荷や他の性質に関わらず，同じように落下することが，実験により示されているので，すべての可能な軌跡の集まりは独立構造を形成する．この構造を時空と呼ぶ．

時空は物質やエネルギー，輻射がどのように落下するかがわかった．これが，一般相対論の，第2番目の性質である．これは，エネルギーが時空をどう曲げるかという第1の性質を補完するものである．巨視的な運動の記述を完全なものにするためには，これを数値化する必要があり，そうすれば，テストすることができる．いつものように，2つのやり方でこれを進めることができる．つまり，運動を方程式を直接的に導出するか，まず，ラグランジアンを求め，それから運動方程式を導出する．しかし，それをやるまえに，もう少し遊んでみよう．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

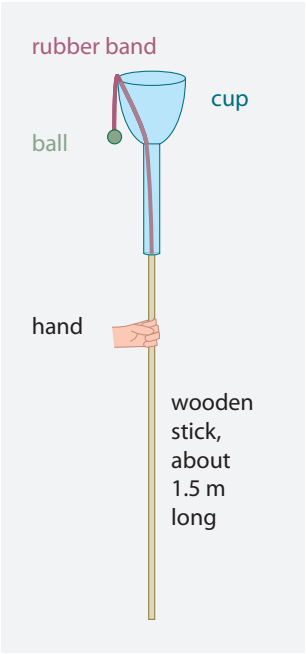


FIGURE 66 問題：ゴムに付けられたボールをカップに入れる最も簡単な方法は何か.

重力についての楽しみ

> Wenn Sie die Antwort nicht gar zu ernst nehmen und sie nur als eine Art Spaß ansehen, so kann ich Ihnen das so erklären: Früher hat man geglaubt, wenn alle Dinge aus der Welt verschwinden, so bleiben noch Raum und Zeit übrig. Nach der Relativitätstheorie verschwinden aber auch Zeit und Raum mit den Dingen.*
>
> アルベルト・アインシュタイン, 1922年, ニューヨークにて.

* *

プラスチックのボトルを持ち，その底のあたりにいくつかの穴をあける．指で穴をおさえ，このボトルに水を満たす．ボトルを離したら，落下中はボトルから水は漏れない．この実験は静止と自由落下の等価性を，どのように検証しているか? Challenge 208 s

* *

アインシュタイは76才の誕生日に，Figure 66のような，プレゼントをもらった．比較的深いカップがほうきの柄に付けられている．カップの底には弱いゴム紐がつけられていて，反対の端はボールに結ばれている．最初は，ボールはカップの外側に垂れ下がっている．ゴムは非常に弱いので，重力に逆らってボールをカップ内に引き入れることはできない．ボールを上手にカップ内に入れるにはどうしたらよいか? Challenge 209 s

* 「その答えを深刻にとらえず, お楽しみとして聞いてくれるなら, こんな答えが可能だ. 昔なら, もし, この世からすべてのものが消え去ったら, 空間と時間が残るだろうと考えられていた. 相対論以降は, ものといっしょに空間も時間も消えるだろう.」

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

* *

重力の性質は，アメリカの特許局を除けば，全宇宙で同じである．2005年，重力を打ち消すように時空を曲げることができる反重力デバイスの特許Nr. 6 960 975が認められた．(patft.uspto.gov参照) もっと簡単なデバイスを思いつきませんか?

Challenge 210 s

* *

Challenge 211 e 地球の表面の時空の曲率半径は$9.2 \cdot 10^{15}$ mである．この値を確認できますか?

* *

Challenge 212 s 木片は水に浮く．上方向に加速するエレベータの中では，なんとか，そのままでいられるか?

* *

Page 52 特殊相対論の説明の際，もし，双子が同じ方向に，同じように加速し，片方の人がもう片方の人より，ある距離だけ先行しているなら，先行する双子の方が，後方の双子より，多く年を取る．これは重力場でも同じか．地球と同じように，場が高度とともに変化すると，何が起きるか?

Challenge 213 s

* *

最大力も最大仕事率も質量流の最大に対応する．$1.1 \cdot 10^{35}$ kg/sを超える質量の流れは存在しないことを示せるか?

Challenge 214 s

* *

Figure 61と62の実験には相違点が1つある．一方は平坦空間で，もう一方は曲がった空間で起きている．1つはエネルギー保存に関連し，もう一方はそれに関連していないようにみえる．これらの差は観測者の等価性を破るものか?

Challenge 215 s

* *

どのようにすれば，宇宙飛行士は自ら体重を測り，十分食べたかどうかをチェックできるか?

Challenge 216 s

* *

軌道上の宇宙飛行士は実際に自由に浮かんでいるのか．答えはノーである．宇宙ステーションや人工衛星はいくつかの小さな効果により加速されていることがわかっている．その重要なものとしては，太陽からの光の圧力，薄い空気の摩擦，太陽風の効果がある．(微細な隕石は無視している.) これらの三つの効果は，軌道の高度により10^{-6} m/s^{2}から10^{-8} m/s^{2}のオーダーの加速を引き起こす．空間に浮いている一個のリンゴが，宇宙ステーションの中央から出発して壁に衝突するまでにどのくらい時間がかかるか計算できますか? ところで，この場合，潮汐加速度はどのくらいになるか?

Challenge 217 s

* *

Vol. I, page ?? この物語の最初に議論したように，自然界には負の質量は存在しない．(反物質でも質量は正である.) このことは，電磁相互作用とちがって，重力は遮蔽することはできないことを意味している．重力が遮蔽できないため，完全に孤立

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

した系をつくれない．しかし，このような系は熱力学になる．このおもしろい
Vol. V, page ?? 性質については後で述べる．たとえば，物理系のエントロピーの上限を見つけ出すことができる．

* *

曲がった空間を利用すると光より速く移動することができるのだろうか．時空の2点を結ぶ径路として平坦な部分を通る径路と，部分的に曲がった部分を通る径路を想像してみてよう．曲がった部分を利用する方が，点と点を速く移動できるのだろうか．数学的にはあり得る話だ．しかし，このような曲がった空間は負のエネルギー密度を持たないといけないだろう．このような状況はエネ
Ref. 141 ルギーの定義や負の質量が存在しないことと矛盾してしまう．自然界では起きないようなことを弱いエネルギー条件という．これは，長さ-質量比の極限を
Challenge 218 ny 意味するのだろうか?

* *

長さ-質量比の極限 $L/M \geqslant 4G/c^2$ があると言われると，これを破る実験を考えてみたくなる．観測者がある質量の傍を，物体長の長さの収縮がこの極限値
Challenge 219 ny に近づく位の高速で通過すると何が起きるか説明できるか?

* *

他のすべての空間から切り離された3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の重要な性質がある．閉じた（1次元）曲線は $\mathbb{R}^3$ においてのみのみ，結び目を作ることができる．それ以上の次元では，いつも結び目は解くことができる．(結び目の存在は，なぜ，3が粒子のカオス的運動を許す最小の次元であるかを説明する.）しかし，一般相対論は，なぜ時空は3プラス1次元かを説明できない．それは，事実に基づくものにすぎない．この深遠で難しい疑問については私たちの冒険の最後の部分で確立される．

* *

アンリ・ポアンカレ（Henri Poincaré）は，一般相対論完成の直前の1912年に他界したが，曲がった空間は必要ないが，唯一の可能性であると，少し，考えていた．光は曲がった空間に沿うとして，ユークリッド空間を利用し続けることが
Challenge 220 s できると思っていた．このような，理論は不可能であることを示せるか?

* *

2個の水素原子が，互いの重力場の中で，円を描いて運動できるか．この「分
Challenge 221 s 子」のサイズはどのくらいになるか?

* *

Challenge 222 s 互いの重力場のなかで，光パルスはお互いの周りを円運動できるか?

* *

Vol. I, page ?? ガリレイ物理の節で述べた，地軸の周りや太陽の周りでの回転といった地球の運動は物理学や天文学のいろんな時間に関係している．最高の原子時計で定義される時間は地球力学時 *(TDT)*と呼ばれている．秒の定義のまずさを補正したり（地球の自転は86 400秒とせず，86 400.002とする），さらに，細かなものと

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

しては，地球の自転のスローダウンの補正をするために，時々，うるう時間を追加することで 協定世界時，つまり，UTCを決めている．そして，この時間から，すべてのうるう時間を考慮することで導かれる時間がある．地球の中心に置かれた回転していない時計で表示される–別の– 時間もある．さらには，太陽系の重心に置かれた時計で示される時間，太陽系力学時 *(BDT)* がある．この時間を用いて，人工衛星は太陽系内で誘導される．つまり，相対論は，法が科学に従うまれなケースの 1 つであるグリニッジ標準時にさようならを告げる (そして，BBCだけが使い続ける)．

Ref. 142

* *

宇宙局が人工衛星を火星や金星，彗星に到着させようとすると，一般相対論を使用しなければならない．使用しないと正しい軌道は計算できず，人工衛星は目標物や目標惑星を外してしまう．実際，宇宙局は安全サイドで考える．つまり，一般相対論が正しいかどうかを常にチェックすることも含め，いわゆる*parametrized post-Newtonian formalism*,と呼ばれる一般化させた相対論を使用している．これまで，一般相対論からのずれは，誤差の範囲内で見つかっていない．*

* *

一般相対論は世界中の宇宙局でも，衛星の正確な位置の計算や衛星から放出される無線周波数に周波数を合わせるために利用されている．さらに，一般相対論は，いわゆる，グローバル・ポジショニング・システム，つまり，GPSで収容な役割を果たしている．この最新のナビゲーションツールは** 世界中をめぐる時計を搭載し世界中を飛行する24基の人工衛星から構成されている．このシステムを運用するにはなぜ相対論が必要なのか．地球上の人間と同じようにすべての人工衛星は円運動をしているので，$\mathrm{d}r = 0$ である．従って，シュワルツシルト計量 (135) は，

Ref. 143

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{r^2}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{v^2}{c^2}\,. \tag{145}$$

* これが何を意味するかをわかってもらうため，一般相対論を基本にした*unparametrized*post-Newtonian formalismを，大きな質量 M の近くの質量 m の物体の運動方程式を，加速度 a の逆二乗則の式からのずれで書く:

$$a = \frac{GM}{r^2} + f_2\frac{GM}{r^2}\frac{v^2}{c^2} + f_4\frac{GM}{r^2}\frac{v^4}{c^4} + f_5\frac{Gm}{r^2}\frac{v^5}{c^5} + \cdots \tag{144}$$

ここで，数値因子 f_n は一般相対論から計算され，1次のオーダーである．最初の2つの奇数次項がない．これは，一般相対論運動が近似的に可逆的であることから生じる．つまり，非可逆的である重力放出は f_5 の小さな項で説明される．注意してほしいのは，この項には，大きな質量 M ではなく，小さな m が含まれている．f_7 までのすべての因子 f_n が計算されている．しかし，太陽系の場合，検出されているのはf_2のみである．この状況は，将来，高精度衛星実験で変わるかもしれない．f_5 までの高次の項は，後述するような二重パルサーで検出されている．

Page 167

Parametrized post-Newtonian formalismでは，非偶数のすべての因子 f_n を，得られたデータにフィットさせる．これまで，これらのフィッティングは一般相対論の予測値と一意している．

** 詳細はウェブサイトwww.gpsworld.comを参照のこと

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 223 e のように書ける．人工衛星の時間と地上の時間の間の関係は，

$$\left(\frac{\mathrm{d}t_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d}t_{\mathrm{Earth}}}\right)^2 = \frac{1 - \frac{2GM}{r_{\mathrm{sat}}c^2} - \frac{v_{\mathrm{sat}}^2}{c^2}}{1 - \frac{2GM}{r_{\mathrm{Earth}}c^2} - \frac{v_{\mathrm{Earth}}^2}{c^2}} \,. \tag{146}$$

である．GPS衛星が24時間に1回の周期で地球を回るとしたら，人工衛星の時計は，毎日何マイクロ秒はやまるか計算できるか．ほんの3マイクロ秒が，1日たつと，1の誤差になるので，人工衛星の時計は，計算による調整で遅くする必要がある．必要な調整はモニターされ，システム稼働以来，これから，毎日，一般相対論が測定誤差内で正しいことが確認されている．

Challenge 224 s

Ref. 144

* *

一般相対論は，GPSレシーバーの助けを借りたワールドワイドな宝探しスポーツ，ジオキャッチングの基礎にもなっている．詳細は，www.terracaching.comとwww.geocaching.comウェブサイトを参照のこと．

* *

Ref. 145 重力定数 G は時間とともに変化しているようには見えない．最近の実験では，その変化率は，1年間に，10^{12} 分の1を超えないことがわかっている．これをどうやってチェックするか想像できるか?

Challenge 225 d

* *

私たちは3次元空間に生きていることを体験しているのは，私たちの感覚の制限によるものと言えるか? どのようにしてか?

Challenge 226 s

* *

Challenge 227 s 原子から放出される光の色に現れる潮汐力の影響を計算できるか?

* *

可能な最も強い重力場は小さなブラックホールの重力場である．しかし，これまでに観測された最も強い重力場は幾分これより小さい．1988年，ZhangとLambは二重星系からのX線を用いて，10 kmのサイズの中性子星の近くの時空が，可能な最大値の30 %近くまで曲げられていることを決定した．中性子星が太陽と同じくらいの質量を持っているとしたら，重力加速度はどのくらいになるか．

Ref. 146

Challenge 228 ny

* *

半径 r を持つ質量 M を，距離 d の所から観測すると，光の曲がりにより，角度が δ だけ変化する．この効果は，次の式で表せる；

Challenge 229 e

$$\delta = \arcsin\left(\frac{r\sqrt{1 - R_{\mathrm{S}}/d}}{d\sqrt{1 - R_{\mathrm{S}}/r}}\right) \quad \text{where} \quad R_{\mathrm{S}} = \frac{2GM}{c^2} \,. \tag{147}$$

Challenge 230 e 無限遠の観測者は，太陽表面の何パーセントがみえるか? この問題をもう少

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Page 262 し詳細に考えてみよう.

重量とは何か.

たった一人（かつ，点状）の観測者は重力の効果と加速度の効果を見分ける方法がない．この自然の性質から，奇妙な言い方ができる．つまり，物が落下するのは，地球の表面がその物に向かって加速運動をするからだ．従って，物体の重量は地球表面の上向きの加速度で，物体を押すことの結果である．これが，日常生活に適用されている等価原理である．同じ理由から，自由落下する物体は重量がゼロである．

数値的に調べてみよう．地球表面の加速度が，その上で静止している人の重量を作り出している．この重量は慣性質量に比例する．言い換えると，物体の慣性質量は重力質量と同等である．これこそ，実験的に観測されていることで，高い精度で成り立っている．ローランド・フォン・エトヴェシュ (Roland von Eötvös) * は，生涯，このような実験を高精度に多数行ったが，不一致を見出したものはなかった．これらの実験では，慣性質量は遠心力効果を決めていて，重力質量は自由落下を決めていると関係を利用した．(この同等性を，彼はどうやってテストしたか想像できるか.)　最近の実験では，この2種類の質量は 10^{-12} の精度で成り立っている.

Ref. 148
Challenge 231 ny
Ref. 148

しかし，質量の等価性は驚くようなことではない．質量比を，加速度比の逆の符号を変えたものと定義し，加速度の原点に依存しないことを考えれば，質量測定法で，慣性質量と重力質量のを区別できない．今まで見てきたように，ガリレイ物理の定義により2つの質量は等しく，全体の議論は，紛らわしいものである．　重力は質量が本来持っている性質なのだ.

Vol. I, page ??
Vol. I, page ??

加速と重力の等価性から，次のような想像できる．エレベータに乗り，下の階へ降りると考える．ボタンをおす．地球表面の加速による上向きの押しは，ビルの押しより小さくなる．つまり，ビルが，エレベータを追い越し，後ろに置いていこうとする．さらに，押しが弱くなるため，エレベータの人は，最初，少し，軽くなったような気がする．ビルとの接触が戻ってくると，エレベータの加速は地球表面の加速度に追いついてくる．従って，私たちは，少しの間，加速とは逆方向に押され，強く加速されている自動車の中にいるような感じになる．つまり，目的の階に到着するまで少し重くなったように感じる.

リンゴはなぜ落ちる

> “Vires acquirit eundo.”
>
> Vergilius**

加速している車は，そこから前方に投げた物体にすぐに追いつくだろう．同じ理由で，地球表面は，投げ上げた石に追いつく．これは，地球表面が，常に，上向きに加速しているからである．このようなものの見方で，木から落ちるリンゴを想像してみよう．リンゴが離れた落ちた瞬間，リンゴは枝による上向きの

* ローランド・フォン・エトヴェシュ(b. 1848 ブダペスト, d. 1919 ブダペスト), 物理学者. 重力についての高精度な実験を多く行った. とりわけ, 彼の名前の付けられた効果を発見している. ブダペスト大学はには彼の名前が付けられている.

** ‘進むにつれて, 力を獲得する.’ プブリウス・ウェルギリウス・マロ (Publius Vergilius Maro) (b. 70 BCE アンデス, d. 19 BCE ブルンディシウム), アエネーイス 4, 175.　より

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

加速をやめてしまうことになる．リンゴは，静かな真の静止をエンジョイできるようになるのだ．人間の知覚には限りがあるため，この静止状態を自由落下と呼んでいる．残念ながら，加速地球表面が，無情にも，近づき，そして，リンゴは，静止している時間に応じた速度で地球に衝突し，変形してしまう．

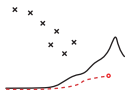
重力が存在すると，高さによる時間の進み方の違いの影響を受けないことも，落下しているリンゴは教えてくれる．実際，このことは，上述の議論と同じように，地球表面が上向きに加速していると言うのと等価である．

この推論は無限に続けられるのか．少しは続けることができる．地球のあらゆるところで，表面は上方向に加速しているのに，どのやって地球は一定の半径を持つのかを示すのはおもしろい． Challenge 232 ny このようにして，加速と重力の等価性を楽しむことができる．しかし，この等価性が有用なのは，加速に関与している物体が1つしかない時だけである．2個の物体を考え始めると，加速と重力の等価性は終わってしまう．複数の物体について調べると，重力と加速は違うという結論になる．重力は時空である．.

ちょっとした数学があれば，重力と曲率の多くの側面について理解できる．次節では，万有引力と一般相対論の差異について焦点をあて，後者だけが実験を説明できることをしめす．その後，曲率の測定方法について述べ，物体の運動と時空に適用する．初心者にとっては，負荷が大きいので，最初は飛ばしてもかまわない．どんな場合でも，恒星と宇宙論とブラックホールは少し数学を使用する．

重力に対し光速が不変なことの意味

重力の場合，時間は高さに依存する．光速不変性から，重力が作用するどんな場所でも，空間と時空は曲げられる．空間の曲率は，等距離線を空間に表示するか，マットレスとして空間をイメージすることで，可視化できる．重力の場合，これらの線は曲がっている．従って，質量は，特に，大きなものは空間を曲げる．質量は空間を曲げる．曲がった空間は，試験質量や光に影響を与え，運動を決定する．



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Chapter 6

開軌道, 光の曲がりと真空の揺らぎ

> アインシュタインは, 自分の理論を毎日, 私に説明してくれた, そして, 私が到着した時, 彼はそれを理解したと私は確信した.
> ハイム・ヴァイツマン (Chaim Weizmann) , イスラエル初代大統領.

Ref. 149

一般相対論の詳細に着手する前に, 一般相対論と万有引力における物体の運動の違いについて調べる. この2つの違いは測定で検出できる. 光速不変性は空間が曲がっていることを意味するので, まずは, この曲率を実際に観測できるかどうかを調べなければならない. それから, どのように曲率を測定し, 曲率測定がどのように高精度の運動の記述に役立つかを説明する.

弱い場

重力は, 地平線近傍で強くなる. これが起きるのは, 質量 M と距離のスケール R が

$$\frac{2GM}{Rc^2} \approx 1 \,. \tag{148}$$

に従う時である. つまり, 重力は, ブラックホール近傍, 宇宙の地平線の近く, 粒子のエネルギーが極端に高い時の3つの状況下で, 主に, 強くなる. 最初の2つはこれから調べるが, 最後のもう1つはこの冒険の最後の部分で述べる. 私たちの惑星や太陽系も含めた宇宙の大部分は地平線からは離れており, この場合, 重力の効果は弱い.

雪崩や隕石落下はすさまじいが, 日常生活の重力は最大力と比べるとずっと小さいものだ. 地球上での, この比は, ほんの 10^{-9} くらいしかないと言われている. 日常生活のすべての場合において, これまで述べてきたにもかかわらず, 場, すなわち, 平坦な時空のポテンシャルで近似できる. これらの弱い場の状態は, 理解しやすく, 興味深い. つまり, これらは, 異なった高さでは時計の進み方が違うという説明に主に必要である. 弱い場の状況を用いると, かたわらの時空の曲率について説明したり, 加速源としての重力について考え続けることができる. 一方, 高さとともに変化する時間から, 万有引力では起こらない多くの新しくておもしろい現象が生じる. これらを調べるために, 必要なのはただ一つ, 首尾一貫した相対論的扱いだけである.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

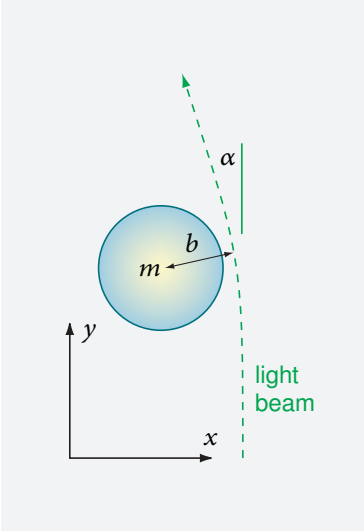


FIGURE 67 質量による光の曲がり の計算

光の曲がりと電波

重力は光の運動に影響を及ぼす．特に，重力は光を曲げる．太陽による光の曲
Page 133 がりを検出できたことがアインシュタインの名声を高めた．この曲りは，万有引力による計算値と異なり，空間の曲がりを考慮した一般相対論の計算結果とよく一致したためである．

以下で言葉の定義を行うが，質量による光の曲がりとは，純粋の重力電気効果で，簡単に計算できる．光の曲がりは観測可能なもので，遠方の観測者ならだれでも質量近傍で実効的な光の速度vの変化を測定できる．(近くの場所で測定をすれば，光速はもちろんいつもcである.) 離れた観測者は，それより小さな速度を検出することがわかっており，その観測者にとって，重力は高密度の光学媒体と同じ効果を持つ．この効果は，1801年にソルトナー (Soldner) が導出した質量近傍での万有引力による光の曲がりを，さらに増加させるものである．このことに少し思いを巡らせてみよう．つまり，相対論的な光の曲がりは，非相対論的な光の曲がりと異なるものである．

偏向角を計算してみよう．通常通り，Figure 67に示すように，無限遠の空間で，時空が平坦になる座標を使う．方針としては，曲がりの値が非常に小さいので，すべての計算を一次のオーダーまで行う．偏向角 α は，一次のオー
Ref. 150 ダーで，単純に，

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} \mathrm{d}y \,, \tag{149}$$

のようになる．ここで，v は遠方の観測者によって測定される光の速度である．
Challenge 233 e (これを示せるか.) 次のステップでシュワルツシルト計量

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{c^2 - \frac{2GM}{r}} - \frac{r^2}{c^2}\mathrm{d}\varphi^2 \tag{150}$$

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 234 ny 用い，それを，一次のオーダーで，(x, y) 座標に変換する．これより，

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2) \tag{151}$$

となる．再度，一次のオーダーまで取ると，

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c\,. \tag{152}$$

が得られる．これは，遠方の観測者が質量近傍を通過する光の速度を測定すると，光が減速されているという私たちがすでに知っていることを証明している．このようにして，高度に依存する屈折率について記述することができる．言い換えると，局所的には一定速度の光であっても，大局的には減速する．

Challenge 235 ny 最終結果を式 (149) 代入し，計算を行うと， 角度αは，

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2}\frac{1}{b} \tag{153}$$

で表せる．ここで，距離 b は，いわゆる，光の進入時の衝突パラメータ衝突パラメータである．ここで得られた偏向角 α は，以前にソルトナーや私たちが求めた万有引力の結果の*2*倍である．太陽の場合，これは，有名な値1.75″になり，1919年の測定旅行で検証された．(偏向角をどうやって測定したかわかるか.) これは，アインシュタインを有名にした実験で，万有引力が誤りであることを示した．実は，アインシュタインは幸運だったといえる．それまでに行った2回の実験旅行では，測定に失敗している．1912年は，雨のため，データ採取に失敗，1914年は，クリミアで科学者が（誤って）スパイ容疑で拘束されてしまった．直前に，第一次世界大戦が勃発したからだ．ところが，その前の1911年にアインシュタインが発表した計算には誤りがあり，正しい値の半分のソルトナーの結果しか示していなかった．一般相対論が完成した1915年になってから，彼は正しい結果を導いた．従って，アインシュタインが有名になったのは，正しい結果を導く以前に行った二回の測定旅行に失敗したからだと言える．

Vol. I, page ??
Challenge 236 s
Ref. 151
Vol. I, page ??

太陽の周りでの高精度の実験では，電波の曲がりを測定するのが有効である．電波は太陽コロナを通過する際に生じる問題が少ないからである．これまで，太陽の通り道にある宇宙の電波源を用いた実験が，独立に，数十回行われている．これらにより，数パーセントの精度で一般相対論の結果と一致していることが示されている．

Ref. 143, Ref. 120
Ref. 121

木星や恒星，銀河や銀河クラスターによる輻射の曲がりも観測されている．地球によるものは高々3 nradしかなく，まだ，測定できないが，近い将来，可能になるかもしれない．アンドリュー・グールド (Andrew Gould) によれば，長年にわたり夜空の高精度な写真を撮り続けている人工衛星ヒッパルコスのデータを精密に解析すれば，この値を検出できるかもしれないとのことだ．

Page 236

もちろん，光の曲がっていれば，曲がった空間で予測されているように，三角形の内角の和も π (2直角) にならないことになる．(曲率の符号はどうなるか.)

Page 175
Challenge 237 ny

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

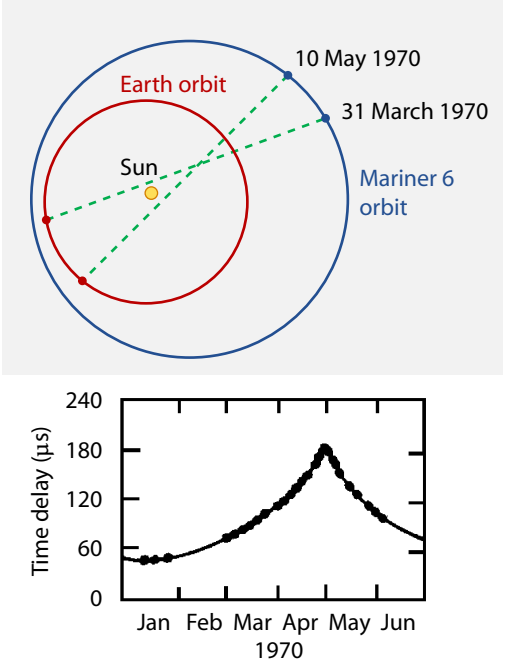


FIGURE 68 ラジオ信号の時間遅れ – アーウィン・シャピロによる実験の1つ

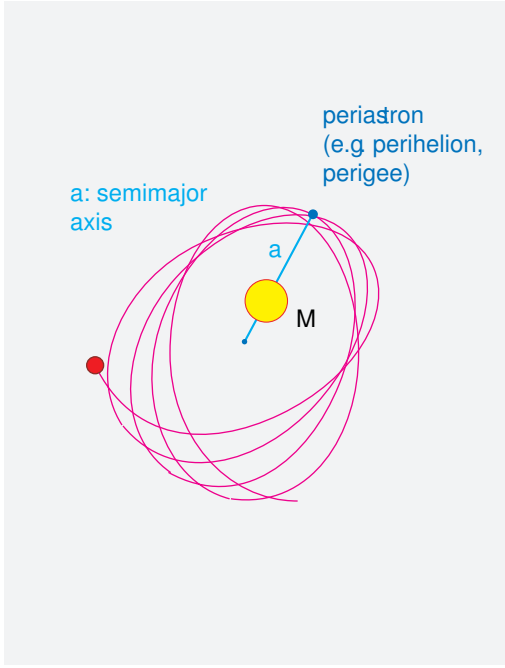


FIGURE 69 一般相対論における中心物体の周りの運動

時間の遅れ

質量の近くでの光の曲がりの計算によると，遠方の観測者にとって，質量近傍で光が減速する．もし，質量近傍での減速がなければ，質量近傍の観測者にとって，光は c より速くなってしまう！* 1964年，アーウィン・シャピロ (Irwin Shapiro) はこの効果を測定するためのアイデアを持っていた．彼は二つの方法を提唱した．一つは，レーダーパルスを金星に向けて発射し，その反射が地球にもどってくるまでの時間を測定するというものだ．信号が太陽の近くを通過すると，信号は遅れるだろう．もう一つは地球と交信する人工衛星を使用することであった．

Ref. 152

Ref. 153

第1の測定は，1968年に発表され，実験誤差の範囲内で一般相対論の予測と一致することが示された．その後行われたFigure 68に示される同様の実験でも，現在1000分の1とされている実験誤差の範囲内で，一般相対論と一致している．また，軌道平面とほとんど同じ面内に視線がある数個の二重パルサーに対しても，時間の遅れが確認された．

まとめると，相対論的重力は，時間の遅れの測定によっても確認された．しかし，万有引力ではこのような効果は説明できない．ここで示した単純な計算を用いたチャレンジ問題を出しておく．質量とエネルギーにより引き起こされる光の速度変化として，強い場での重力，すなわち，完全な一般相対論を記述できるか．

Challenge 239 ny

* ゆっくりとした速度の粒子の曲がりはソルトナーの値に近づき，高速になるにつれ値はその2倍に近づくことを示すのはなかなか良い練習問題である．これらすべての考察において，質量の回転は無視されてきた．慣性系の引きずりの効果として，回転は偏向角を変えるが，その影響は検出限界より小さい．

Challenge 238 e

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

軌道に与える相対論的効果

天文学を用いると，知られている運動の最も精密な測定が可能になる．特に，惑星の運動がそうである．それで，アインシュタインは，まず，相対論的重力の結果を惑星の運動に適用してみようとした．惑星の運動に対し，万有引力の予言からのずれがないかをさがした．そして，そのようなずれを見つけ出した．水星の近日点の歳差である．この効果をFigure 69に示す．アインシュタインは後に水星の歳差の計算が観測結果と一致した瞬間が人生でもっとも幸せな瞬間であったと述べた．

計算は難しくない．万有引力では，軌道は $a_{\text{grav}} = a_{\text{centri}}$，つまり，$GM/r^2 = \omega^2 r$ とおき，エネルギーと角運動量を固定すれば計算できる．軌道を回る物体の質量はあらわれない．

一般相対論では，軌道物体の質量は，エネルギーと角運動量を $e = E/c^2 m$ と $j = J/m$ とスケール変換することで消えてしまう．次に，空間曲率を含める必要がある．上述したシュワルツシルト計量を用いて(150)，エネルギー e の初期条件とそれの保存則から，固有時間 τ と無限遠での時間の関係が求まる:

Ref. 120, Ref. 121
Page 134
Challenge 240 e

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{1 - 2GM/rc^2}\,, \tag{154}$$

一方，角運動量 j とその保存則からは，

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{j}{r^2}\,. \tag{155}$$

が得られる．これらの関係は，その質量 m に関係なくどんな粒子でも成り立つ．これをシュワルツシルト計量に代入すると，粒子の運動は，

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{c\mathrm{d}\tau}\right)^2 + V^2(j,r) = e^2 \tag{156}$$

に従うことがわかる．ここで，有効ポテンシャル V は

$$V^2(J,r) = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\left(1 + \frac{j^2}{r^2c^2}\right)\,. \tag{157}$$

である．この式は，万有引力の式とは少し違っているのでチェックしてみてください． さて，$r(\varphi)$ に対して，解く必要がある．円軌道に対しては，2つの可能性がある．

Challenge 241 e
Challenge 242 e

$$r_\pm = \frac{6GM/c^2}{1 \pm \sqrt{1 - 12(\frac{GM}{cj})^2}} \tag{158}$$

ここで，負の符号は安定軌道を，正の符号は不安定軌道となる．もし，$cj/GM < 2\sqrt{3}$ ならば，安定軌道は存在しない．つまり，物体は表面に衝突するか，ブラックホールなら呑み込まれてしまう．角運動量 j が $2\sqrt{3}GM/c$ より大きい時のみ，安定円軌道が存在する．このように，一般相対論では，万有引力と

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

違い，最小安定軌道が存在する．この最小安定軌道は $6GM/c^2 = 3R_S$ である．

楕円軌道では，状況はどうなるのだろうか．(156) で，$u = 1/r$ とおき，$u(\varphi)$ の式を微分すると，

$$u' + u = \frac{GM}{j^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \,. \tag{159}$$

となる．一番右の一般相対論による非線形補正項ががなければ，その解は有名
Challenge 243 e な円錐断面になる．

$$u_0(\varphi) = \frac{GM}{j^2}(1 + \varepsilon\cos\varphi) \,, \tag{160}$$

つまり， 楕円，放物線，または双曲線である．円錐断面の形状は，.離心率と呼ばれるパラメータ ε に依存する．これらの曲線の形は，万有引力の時に習った．さて，一般相対論では，式 (159) の右辺の非線形項を入れないといけない．
Vol. I, page ?? 従って，その解はもはや円錐断面ではない．しかし，その補正は小さいので，
Challenge 244 e

$$u_1(\varphi) = \frac{GM}{j^2}\left(1 + \varepsilon\cos(\varphi - \frac{3G^2M^2}{j^2c^2}\varphi)\right) \,. \tag{161}$$

の近似がよく成り立つ．万有引力の放物線と双曲線がやや変形された形になっている．楕円軌道の代わりに，Figure 69で示される有名なロゼッタ軌道となる．このような経路には近日点移動という特徴がある．太陽の場合のThe 近星点，つまり，近日点とは軌道物体が中心物体に最も接近する点である．この近日点が，各回転ごとに角度

$$\alpha \approx 6\pi\frac{GM}{a(1-\varepsilon^2)c^2} \tag{162}$$

だけ中心物体の周りを回転する．ここで a は短半径である．水星に対しては，この値は，一世紀当たり43″である．1900年頃には，この効果はすでに知られていたが，万有引力では説明できなかった．アインシュタインがこの値にたどり着いたとき，何日にもわたり喜びにあふれた．

計算と実験の結果が一致したことは確かだったが，ロゼッタ軌道を生じる他の効果はないことを示さなければならない．かつて，太陽の四重極モーメントがこの効果を生むかもしれないと考えられたことがあったが，後にこの可能性は外された．

現在，近日点の移動は太陽の周りの金星や火星の軌道，イカルスの軌道のほか，いくつかの二重星系で測定されている．二重パルサーでは，近日点の移動
Ref. 154 が一年に数度にもなることがある．いずれの場合でも，式 (162) は，実験誤差の範囲内の運動を記述している．

重力波が放出されると，ロゼッタ軌道自身も安定で無くなるのだ．しかし，
Page 166 太陽系では，先に述べたように，何十億年にわたり，このような仕事率損失は完全に無視できるので，ロゼッタ軌道はやはり観測結果をあらわす良い指標である．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

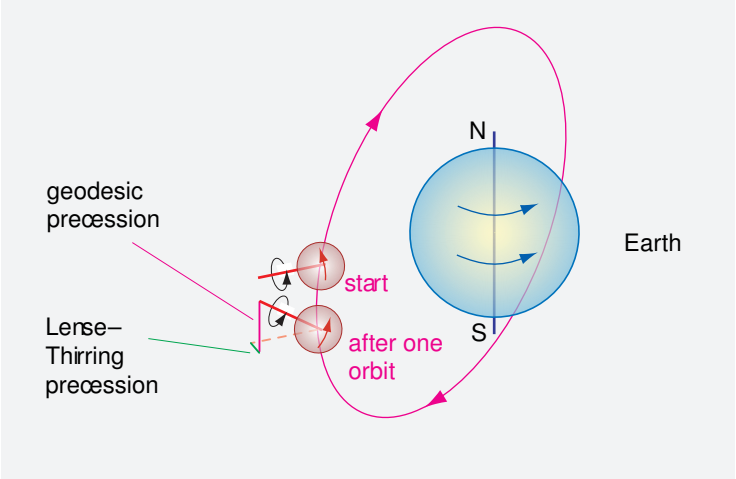


FIGURE 70 測地線効果

測地線効果

1916年，相対論的重力にはさらに軌道運動をしている物体に影響を与えるとド・シッターは予測した．* 方向を持った物体が中心質量mからrの距離の軌道上を運動している時，その先端方向は，軌道を一周すると変化する．Figure 70に示すこの効果は，一般相対論のみに存在 する．軌道1周後の方向角度 α の変化は

$$\alpha = 2\pi\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3Gm}{rc^2}}\right) \approx \frac{3\pi Gm}{rc^2} \,. \tag{163}$$

となる．この角度変化は測地線効果と呼ばれている．さらに，これはgravitoelectric場とgravitomagnetic場に分けることができる．このことを示してみたくはないですか． 明らかに，これは万有引力には存在しない．

Challenge 245 e

軌道運動する物体の方向を，自転する衛星のような固有の回転方向にとると，測地線効果は軸の測地線歳差を生み出す．この効果は原子理論のスピン軌道相互作用に似ている．(後述するThirring–Lense効果は スピンスピン相互作用と類似している.)

ウィレム・ド・シッターが測地線効果，または，測地線歳差を予言した際，彼は地球と月のシステムも太陽をまわりながらその方向が変わると提唱した．この効果は微小である．月の軸に対しその歳差角は1年で約0.019 arcsecせある．この効果は，1987年，地球と月の系において，電波干渉計と，ルノホートとアポロが月面に残してきた，Figure 71に示すキャッツアイを用いた位置標定の組み合わせを使用して，イタリアのチームciufmooにより，始めて測定された．人工衛星内の測地線効果を測定する実験も現在進行中である．

一見して，測地線歳差は特殊相対論で発見されたトーマス歳差と似ている．両方とも，閉曲線に沿う移動により，元の方向が保持されない．しかし，注意深く調べてみると，トーマス歳差は，他の非重力相互作用を適用することで，測地線歳差に追加できることが示ささされている．従って，このアナロジーも当てにならない．

Page 56

* ウィレム・ド・シッター (Willem de Sitter) (b. 1872 スネーク, d. 1934 ライデン) 数学者, 天文学者, 物理学者

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

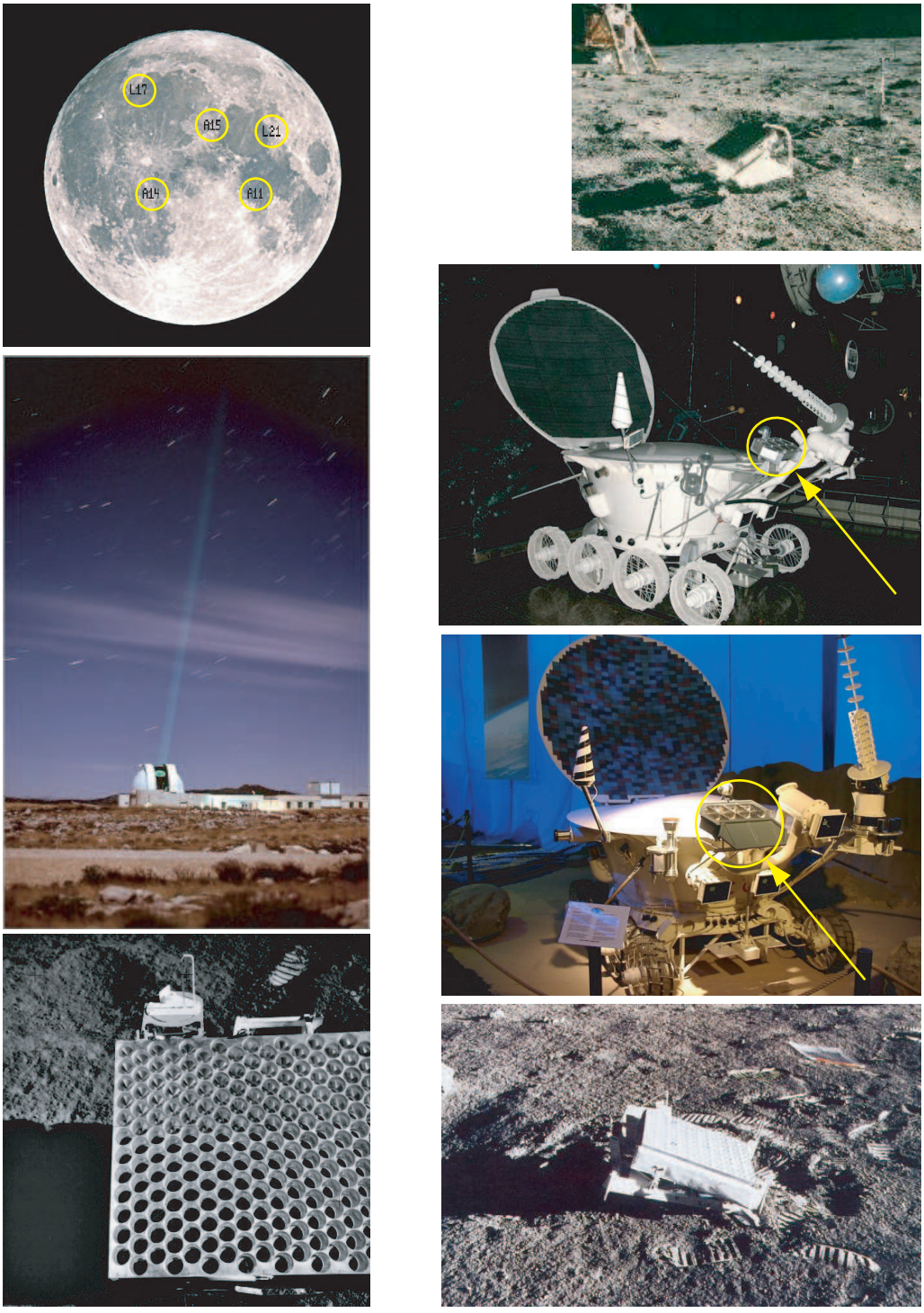


FIGURE 71 月の逆反射体. アポロ11号によるもの (右上) , 2台のルノホート (右) , アポロ14号によるもの (右下) , アポロ15号によるもの (左下) , 月面上の設置場所 (左上) とレーザ測距を行う望遠鏡 (© NASA, Wikimedia, Observatoire de la Côte d'Azur)

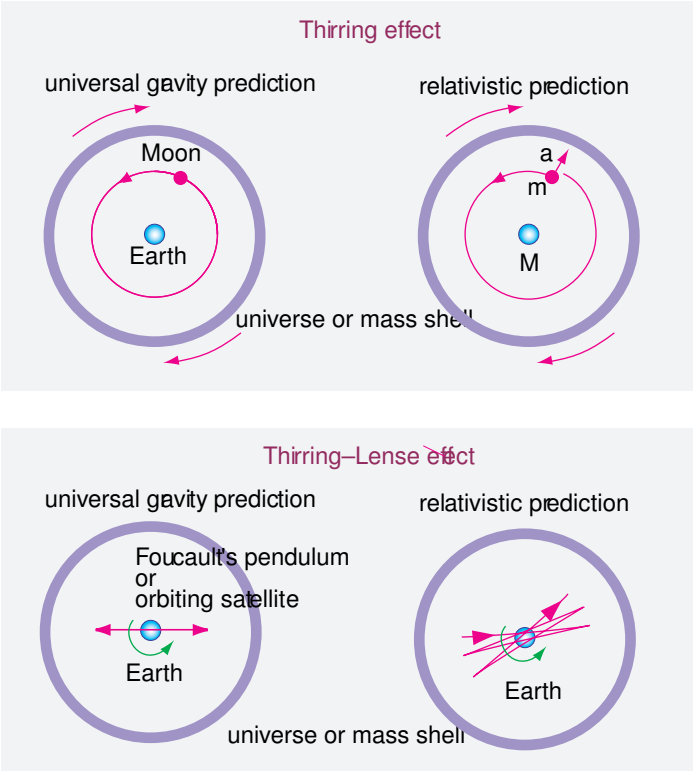


FIGURE 72 The ThirringとThirring–Lense効果

THIRRING効果

1813年，オーストリアの物理学者，ハンス・サーリング (Hans Thirring) は運動に関する2つのシンプルで美しい新しい予測をした．その一つは，ヨセフ・レンズ (Josef Lense) と共同で行ったものだ．いずれも万有引力では現れないものだが，一般相対論では両方とも現れる． Figure 72はこれらの予測を図示したものだ．

Ref. 156, Ref. 157

最初の例は，現在，*Thirring*効果と呼ばれ，回転する質量殻の内部の質量に対する遠心力加速とコリオリ加速を予測するものだ．サーリングは，もし，封じ込めている質量殻が回転すると，その内部の質量は殻の方向に引き寄せられることを示した．この効果は非常に小さなものだが，この予測は，万有引力からの予想とは大きくちがうものだ．万有引力では，球質量殻の回転の有無にかかわらず，内部の質量に対しこのようなことは起きない．サーリング効果を，この図とマットレスの類似性を用いて説明できるか?

Challenge 246 e

もう一つの効果，*Thirring–Lense*効果* はもっと有名である．一般相対論の予測によると，振動するフーコーの振り子や地球の極軌道を回転する衛星は，静止している宇宙に対する固定面に厳密にとどまっておらず，その面は微妙に地球の回転に引っ張られる．この効果は慣性系の引きずりと呼ばれ，真空中の地球が柔らかいマットレス上の回転するボールのように振る舞うためにおきる．ボールや殻がマットレスのフォーム内で回転すると，その方向にフォームを少

* 執筆者名の順番がレンズとサーリングとなっていても，ふつうは (必ずというわけでもないが) サーリングの名前を先にして，ハンス・サーリングのアイデアを強調する．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

FIGURE 73 LAGEOS衛星. 426個の逆反射体で覆われた直径60 cm, 質量407 kgの金属球 (NASAの好意による)

しだけ引っ張る．同様に，地球も真空を少し引きずり，そのため，振り子の振動面が回転する．同じ理由で，地球の回転は衛星の軌道面を回転させる．

Thirring–Lense効果，つまり，慣性系の引きずり効果は非常に小さい．それを最初に測定したのは，おそらく，1988年，イグナチオ・チュフォリニ (Ignazio Ciufolini) を中心としたイタリア人のグループで，その後，2004年に至る数年の間に同じグループが再度測定したと思われる．このグループは，Figure 73に示すような金属体と複数のキャッツアイからなる2基の特殊な人工衛星の運動を追跡した．このグループは反射されたレーザー光を用いて，地球を回るこの衛星の運動を極めて精密に測定した．この方法を用いると，比較的安価に，素早い測定が可能である．残念なことに，システム効果の大きさ やその他の理由で，発表された結果は信頼できるものではない．

Ref. 158

Ref. 159

これまで，地球周囲での実験を行ったのは他に1つのグループしかない．Gravity Probe Bという実験用の衛星が，予定から30年以上経過した，2005年に軌道上に打ち上げられた．これらの衛星は極めて複雑で，高速回転する超伝導球を搭載している．いくつかの系の破損があったものの，2009年，地球の周りの慣性系の引きずりの存在を確認した．算出結果は約25 %の範囲で一般相対論の予測値を確認した

その間，慣性系引きずり効果の測定は，別途，さまざまな天体系でもすすめられていた．最良の検証結果はパルサーから得られた．パルサーは非常な高精度で規則的な，例えばミリ秒ごとに，ラジオパルスを発生している．パルスがちきゅうに到着した時間を精密に測定することで，これらの星の詳細な運動を導き，慣性系の引きずりのような微妙な効果が実際起きていることを確認することができる．

Ref. 161

Gravitomagnetism*

慣性系の引きずり，測地線効果，サーリング効果は*gravitomagnetism*の特殊な場合と見ることができる．(その関係はこれから説明する.) 重力へのこの方面からのアプローチは，一般相対論が発見されるずっと前の19世紀，ホルツミューラーや ティッサーラントによって，すでに研究されていた．このアプローチは，理解しやすいことから，近年，再び有名なってきた．すでに述べたように，重力場についての説明は，いつも，近似である．日常生活で見られるような弱い重力場では，この近似がよく成り立つ．多くの相対論的効果は，空間曲率と

* この節は, 最初に読むときはスキップしてもよい.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

か計量テンソルの考え方を用いなくても，重力場で記述できる．完全な時空行列を記述する代わりに，重力場モデルだけで平坦な状態からの行列のずれを記述でき，そのずれが，重力場と呼ばれる一つの独立した内容のようにふるまう．しかし，重力場を相対論的に正しく記述する方法とはどういうものだろう．

この状況は電磁気学になぞらえることができる．電磁気学の相対論的記述では，電磁場は電場成分と磁場成分を持つ．電場は逆二乗のクーロン力のもとである．同様に，(弱い) 重力の相対論的記述においては，* 重力場はgravitoelectric成分とgravitomagnetic成分を持つ．gravitoelectric場は逆二乗の重力加速のもとになる．つまり，日常生活で重力場と呼んでいるのは完全な相対論的 (弱い) 重力場のgravitoelectric部分のことである．

Vol. III, page ??
Ref. 163, Ref. 164

それでは，gravitomagnetic場とは何だろう．電気力学では，電荷が電場を生成し，運動する電荷，つまり，電流が磁場を生む．同様に，相対論的に弱い場の重力では，質量–エネルギーがgravitoelectric場を生成し，運動する質量-エネルギーがgravitomagnetic場を作る．言い換えると，慣性系引きずりはgravitomagnetic効果によるものであり，質量流によるものである．

電磁場の場合，磁場と電場の区別は観測者に依存する．2種類の場の一方はもう一方に変換できる．同様のことが重力でも起きる．電磁場は，2つの型の重力場がどう振る舞うかについての良い示唆を与えてくれる．この直観的見方はそのまま重力にも移すことができる．電磁気学において，電荷の運動 $\boldsymbol{x}(t)$ は，ローレンツ方程式

Ref. 163
Vol. III, page ??

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = q\boldsymbol{E} + q\dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{B} \,. \tag{164}$$

で記述できる．言い換えると，速度の変化は電場 $\boldsymbol{E}$ によるもので，磁場 $\boldsymbol{B}$ は速度に依存して速度の方向は変えるが，速度自身は変えない．両方とも，電荷 q の値に依存する．重力の場合，この式は，

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = m\boldsymbol{G} + m\dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{H} \,. \tag{165}$$

になる．電荷の役割を担っているのが質量である．電場の役割はgravitoelectric場 $\boldsymbol{G}$ に引き継がれている．これが，日常，重力場と呼んでいるものである．また，磁場の役割を担っているのがgravitomagnetic場 $\boldsymbol{H}$ である．運動についてのこの式で，gravitoelectric場 $\boldsymbol{G}$ についてはすでに知っており，

$$\boldsymbol{G} = \nabla\varphi = \nabla\frac{GM}{r} = -\frac{GM\boldsymbol{x}}{r^3} \,. \tag{166}$$

で表せる．通常，量 φ は (スカラー) ポテンシャルである．場 $\boldsymbol{G}$ は，万有引力の普通の重力場で，質量から作り出され，加速度の次元を持つ．質量がgravitoelectric場の源になる．gravitoelectric場は $\nabla\boldsymbol{G} = -4\pi G\rho$ に従う．ここで，ρ は質量密度である．静的場 $\boldsymbol{G}$ は渦なしで，$\nabla \times \boldsymbol{G} = 0$ が成り立つ．

gravito*electric*場が存在しているなら，相対論ではgravito*magnetic*場も存在しなければならない．静止観測者から運動観測者に変わると，gravitomagnetic場は現れる．(同様のことが電気力学でもいえる.) Figure 74のように，無限に長い棒がに向かい落下している粒子がこれを表している．棒に対し静止している観測者は，gravitoelectric力のみですべての状況を記述できる．棒に沿って，一

Ref. 165
Vol. III, page ??

* この近似が成り立つ要件は低速度, 弱い場, 局在化した静的な質量エネルギー分布である.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

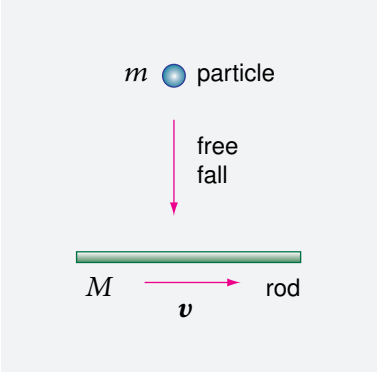


FIGURE 74 gravitomagnetismの例

定速度で動いている第2の観測者は，棒方向に，粒子の運動量も加速していることを観測する．この観測者はgravitoelectric場だけではなく，gravitomagnetic場も観測する．実際，速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する粒子は，テスト質量 m に

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \tag{167}$$

の（3元）gravitomagnetic加速度を生じる．ここで，電気力学と大体同じように，
Challenge 247 ny 静的 *gravitomagnetic*場 $\boldsymbol{H}$ は，

$$\boldsymbol{H} = 16\pi N \rho \boldsymbol{v} \tag{168}$$

である．ここで，ρ は場の源の質量密度で，N は比例定数．自然界にはgravitomagnetic場の源はない．つまり，$\nabla \boldsymbol{H} = 0$ である．gravitomagnetic場は角速度のように時間の逆の次元を持つ．

Challenge 248 ny Figure 74の状況を調べると，比例定数Nは，

$$N = \frac{G}{c^2} = 7.4 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{m/kg}\,, \tag{169}$$

となり，極めて小さい値であることがわかる．そして，電気力学と同様，gravitomagnetic場はgravitoeelctric場より因子 c^2 だけ小さいことがわかる．このため，検出が難しいのだ．さらに，gravitomagnetismの観測をさらに困難にするもう一つの様相がある．電磁気と比較すると，重力の場合では，純
Challenge 249 s 粋のgravitomagnetic場を検出する手段がないのだ．(なぜか.) いつも，普通のgravitoelectric場と混じってしまっているのだ．これらの理由から，gravitomagnetic効果が初めて測定できたのは1990年代になってからである．言い換えると，万有引力は，すべてのgravitomagnetic効果を無視した時に生じる一般相対論の弱い場の近似である．

まとめると，質量が動くと，それは*gravitomagnetic*場を作り出す．gravitomagnetic場とはどんなものか想像できるだろうか．その効果を少しだけ見てみよう．Figure 74の実験は，運動する棒は少しだけテスト質量を運動の方向に加速させる効果があることを示した．真空をマットレスとみなすと，運動するロッドは真空だけでなく，たまたまそこにいたテスト質量もその方向に引きずるように見える．Gravitomagnetismは真空の引きずり.として見える．真空をマット

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

レスと考えるのはあまり気が進まないので，代わりに慣性系の引きずりという表現を使う．

この記述では，すべての慣性系の引きずり効果は*gravitomagnetic*効果である．特に，gravitomagnetic場は，Figure 72のThirring–Lense効果のように，大きな質量が回転する時にも現れる．角運動量を $\boldsymbol{J}$ とすると，gravitomagnetic場 $\boldsymbol{H}$ は双極子場で，

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \left(-2 \frac{\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{x}}{r^3} \right) \tag{170}$$

となり，電気力学の場合とまったく同じになる．回転する質量の周りのgravitomagnetic場には3つの効果がある．

一つ目は，電磁気のように，角運動量 $\boldsymbol{J}$ を持つ大きな回転質量の近くに角運動量 $\boldsymbol{S}$ の回転するテスト質量があると，このテスト質量はトルクを感じる．このトルク $\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{H} \,. \tag{171}$$

で表せる．このトルクが先に述べた ジャイロスコープの歳差とか測地線歳差を生じる．地球の場合，この効果は非常に小さく，北極でこの歳差は0.6ミリアーク秒の円錐角で，回転率は地球の歳差の 10^{-10} 倍のオーダーである．

graviomagnetismの第2の効果は次のようなものだ．トルクは $\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{S}$ で表せるので，角運動量 $\boldsymbol{J}$ の大きな質量の回転体質量にの双極子場は軌道上の質量に影響を及ぼす．軌道上の質量は軌道面の歳差の影響をうけることになる．

Challenge 250 ny

無限遠からみると，長半径 a と離心率 e の軌道に対し，

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\frac{\boldsymbol{H}}{2} = -\frac{G}{c^2}\frac{\boldsymbol{J}}{|\boldsymbol{x}|^3} + \frac{G}{c^2}\frac{3(\boldsymbol{J}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^5} = \frac{G}{c^2}\frac{2\boldsymbol{J}}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \tag{172}$$

となる．これがレンズとサーリングの予測である．* 原子のスピン-スピン結合のような効果は極端に小さく，地球表面近傍の衛星では，一周期の間の角度の変化は8″しかない．このことが，地球上に限定された実験に関そのする困難さと結果について論争の原因になっている．先に述べたように，この効果はパルサー系で大きくなる．

第3の効果はまだ述べてはいないが，質量が回転すると，さらに近星点歳差を引き起こす．これは，たとえ，中心物体が回転していなくても，空間の曲率により軌道上の質量に生じる効果と似ている．時空の曲率により，回転が歳差を減少させる．この効果は，1974年に発見された有名な連星パルサーPSR 1913+16や，2003年に発見された「真の」2重パルサーPSR J0737-3039で確認された．後者のシステムの近星点歳差は16.9°/aで，これまで，発見されたもので最大のものである．

Ref. 166

gravitoelectric効果とgravitomagnetic効果へ分離するのは，重力を記述するのによい近似となっている．また，分離することで次のような疑問の答えとなる．重力が太陽から私たちの所に届くのに8分必要とすると，どうやって重力は地球を太陽の周りを回転させ続けられるのか．結局，重力場をgravitoelectric成分とgravitomagnetic成分に分離することで，重力波の単純な記述が可能なる．

Challenge 252 s

Challenge 251 ny

* 一様に回転する球の角運動量は $J = \frac{2}{5} M\omega R^2$ となる．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

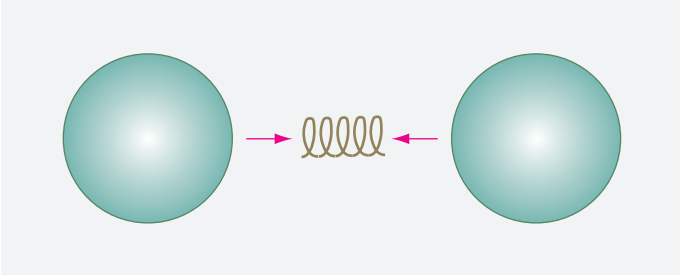


FIGURE 75 A Gedanken 重力波の必要性を示す実験

TABLE 4 The predicted spectrum of gravitational waves.

周波数	波長	名称	期待できる状況
$< 10^{-4}$ Hz	> 3 Tm	極端に低い 周波数	ゆっくりとした二重星系, 超大質量ブラックホール
10^{-4} Hz–10^{-1} Hz	3 Tm–3 Gm	非常に低い周波数	高速二重星系, 大質量ブラックホール, 白色矮星振動
10^{-1} Hz–10^{2} Hz	3 Gm–3 Mm	低周波数	二重星系, 中程度または軽いブラックホール
10^{2} Hz–10^{5} Hz	3 Mm–3 km	中程度の周波数	超新星, パルサーの振動
10^{5} Hz–10^{8} Hz	3 km–3 m	高周波数	知られていない. 将来, 人類が作り出すかもしれない源
$> 10^{8}$ Hz	< 3 m		未知の宇宙論的源

重力波

物理学の最もすばらしい予測の1つが重力波の存在である. 重力波* はからっぽの空間が運動や振動する可能性を証明する. 基本的なアイデアは簡単である. 私たちが生きている空間は, 大きなマットレスように伸び縮みするので, 空間はマットレスや弾性媒体のように伝播波の形での振動を行うだろう.

Ref. 167 Jørgen Kalckar と Ole Ulfbeck は, 最大エネルギー速度が存在を出発点にして, 重力波が必要になることの簡単な考察をおこなった. 彼らは, 重力の引力効果でお互いの方向に向かって落下してゆく2つの質量を調べ, それらの間にバネを想像した. この状況をFigure 75に示す. このバネのため, これらの質量は, 互いに, 何度もバウンドする. 中間のバネは落下する質量からの運動エネルギーを貯める. そのエネルギー値は収縮された時のバネの長さにより決まる. バネが再び, 質量が空間に向かって放り出されると, 引力としての重力は質量を減速させ, 質量は落下を始める. これが, 繰り返される.

しかし, バネに蓄積されたエネルギーは, 一周期ごとに, 小さくなると考えられる. 一方の球がバネから離れると, もう一方の球の重力に引かれ減速される. この減速値はもう一方の質量までの距離に依存するが, 伝播速度には最大が存在するため, 実効的な減速は, 重力効果が第2の質量に向かって発せられる

* 英語の用語'gravity wave'は, 厳密に言えば, 特別な意味をもっている. つまり, *gravity waves*は, 重力が復元力になっている海の表面波のことである. しかし, 一般相対論では この用語と'gravitational wave'の両方が, 同じ意味で使用されている.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

時のその質量の離れていた距離により決まる．互いに離れてゆく2個の質量にとって，実効的な距離は実際の距離より小さい．つまり，離れる間に，実際の減速は，時間の遅れを入れずに計算した結果より大きい．

同様に，ある質量がもう一方の質量に引き戻される時，重力効果が相手側の質量に向かって移動し始める時の距離に従い，加速される．従って，近づく間の加速は，時間の遅れを入れずに計算されたものより 小さい．

つまり，2つの質量が戻ってきて出会う時のエネルギーは，離れて行った時と比べて 小さくなっている．跳ね返るたびにバネの圧縮は減ってゆく．このエネルギー差は各質量から失われたものだ．つまり，エネルギーは時空に持ち去られたのだ．言い換えると，エネルギー差は重力輻射として放出されている．同様のことが，マットレスでも起きる．マットレス上に鉄球を置くとその周辺は変形するように，質量はその周辺の空間を曲げる．(ただし，実際のマットレスと違うのはボールとマットレスの間に摩擦がないことだ.) 二つの金属球が互いに衝突し，分かれてゆき，また戻ってくることをくりかえすなら，マットレス上に表面波が送り出されるだろう．この効果により，時間とともに衝突ごとに2個の質量間距離が縮まる．類似の効果の測定がすでに行われている．バネによる反発ではなくて，2個の質量が互いの周りを周回しているケースである．

重力波の単純な数学的記述では，gravitomagnetic効果とgravitoelectric効果を分離して行う．gravitomagnetic効果とgravitoelectric効果を*gravitodynamics*に拡張することに力を注ぐ必要はない．クーロンの引力をすべての慣性観測者に対しブーストすることで電気力学が導入できるのと同様，万有引力をすべての観測者にブーストすることでgravitodynamicsを導入できる． 次の4つの方程式が得られる．

Ref. 168

Challenge 253 ny

$$\nabla\cdot\boldsymbol{G} = -4\pi G\rho \quad , \quad \nabla\times\boldsymbol{G} = -\frac{1}{4}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0 \quad , \quad \nabla\times\boldsymbol{H} = -16\pi N\rho\boldsymbol{v} + 4\frac{N}{G}\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial t} \,. \tag{173}$$

これらの式の中で，2つの式はすでにお目にかかったことがある．残りの2つの式は前に出てきた式に時間依存性を考慮した改良版である．4という因子を除くと，gravitodynamicsの式はマックスウェルの電気力学の式と同じである．因子4が現れるのは，重力波の角運動量とエネルギーの比（'スピン'）が電磁波と異なるためである．重力波のスピンが2であるのに対し，電磁波はスピン1を持つ．輻射のスピンは古典的な性質であることに留意する必要がある．波のスピンは比 $E/L\omega$ である．ここで，E はエネルギー，L は角運動量，ω は角周波数をあらわす．この比が電磁波では1，重力波では2になる．

ちなみに，重力は万有であるため，自然界にはスピン2の粒子が1種類しか存在しない．これに対しスピン1の場合は対照的で，自然界には複数の例が存在する．

gravitodynamicsの式は，加速を作り出す場の定義で補われなければならない:

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = m\boldsymbol{G} + m\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{H} \,. \tag{174}$$

数値的に異なった因子の定義も共通で，giravitodynamicsの式の数値因子も違っ

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

てくる.

gravitodynamicsの式は単純な性質を持っている．真空中において，この式からgravitoelectric場 $\boldsymbol{G}$ とgravitomagnetic場 $\boldsymbol{H}$ の波動方程式を導ける．(難しくないのでやってみてください.) Challenge 254 ny 言い換えると，重力は波のようにふるまい，重力は放射される．これはすべて，万有引力の式を運動する観測者に適用し，観測者もエネルギーも c より速く動けないという制限を用いることから導ける．バネを用いた先ほどの説明も今の数学的説明も，同じ仮定を用い，同じ結論にたどり着く.

Challenge 255 e 少し計算をすると，重力波の速度は

$$c = \sqrt{\frac{G}{N}} \,. \tag{175}$$

Vol. III, page ?? で表せる．この結果は，電磁気の式

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \,. \tag{176}$$

に対応している．2つの速度は同じなので，同じ文字を使用した．両方ともその影響は静止質量ゼロの全エネルギーに共通した速度で伝わってゆく．厳密に言えば，予測である．主張とは裏腹に重力波の速度はまだ測定されていないのだ.

Ref. 170 重力波はどのように考えればいいのだろうか．これまで，重力波はマットレスの表面波に対応していると，あいまいな説明をしてきた．そろそろ，もう少し，ましな説明をしなければいけない．私たちはマットレスの内部で生きている．重力波は，マットレス，つまり，空間の変形が移動し，振動しているのだ．マットレスの波のように，重力波は横波であることがわかる．従って，重力波は偏光可能である．実際，重力波は2種類の偏光ががある．重力波の効果を，線

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

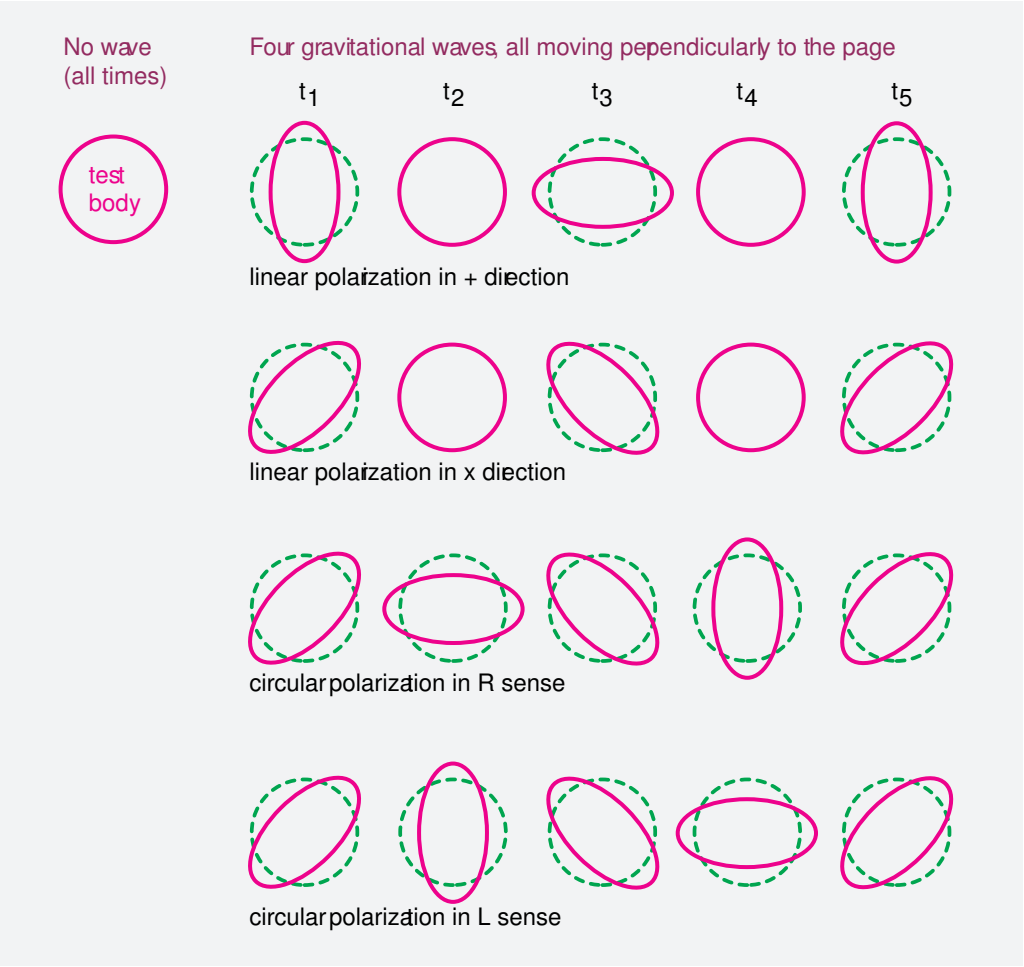


FIGURE 76 ページに垂直方向に移動する平面重力波による円形または球体物体への影響

偏光と円偏光の重力波の効果をFigure 76に示す. * 波は角度 π の回転に対

* z方向に進む (小振幅の) 平面重力波は

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{xy} & -1+h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{177}$$

で表せる計量gで記述できる. ここで, 2つの成分は, 平面調和波のように,

$$h_{ab} = B_{ab} \sin(kz - \omega t + \varphi_{ab}) \tag{178}$$

で与えられ, この振幅のの比が偏光度を決定する. 物理系により, 振幅 B_{ab}, 周波数 ω, および, 位相 φ が決まる. 波動方程式から決まる波数kの一般的な分散関係は

$$\frac{\omega}{k} = c \tag{179}$$

となり, 波は光速で運動する.

別のゲージでは, 平面波は

$$g = \begin{pmatrix} c^2(1+2\varphi) & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & -1+2\varphi & h_{xy} & 0 \\ A_2 & h_{xy} & -1+h_{xx} & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{180}$$

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

し不変であり，2つの偏光は角度 $\pi/4$ だけ違っている．このため，この波に対応する粒子である重力子（graviton）はスピン 2 である．(一般には，スピン S 粒子の古典的輻射場は $2\pi/S$ の回転に対し不変である．さらに，スピンS粒子の2つの直交する線形偏光は角度 $\pi/2S$ をなす．例えば，光子では，スピンは1である．実際，不変回転角は 2π で，2つの偏光のなす角は $\pi/2$ である.)

空っぽの空間を，空間を満たすマットレスとして考えると，重力波はマットレスの変形の揺動と考えられる．もっと正確には，Figure 76に示すように，円偏光の波は，マットレスを通過してゆくコルク栓抜きのような性質を持っている．コルク栓抜きと円偏光の重力波の類推がうまく成り立つかどうかは後でわかる．実際，私たちの冒険の後半部分で，自動的にコルク栓抜き波を内在した時空マットレス模型を見つけ出すことになる．(それに対し，普通のラテックス製のマットレスで表現されるのはスピン1の波である.)

重力波の発生と検出

重力波はどのように発生するのだろうか．質量が加速されているのは間違いない．しかし，どうやって．エネルギーの保存のため，質量単極子が強度を変えることは許されない．また，半径が振動している球状質量からは重力波は発生しないことが万有引力からわかっている．さらに，運動量の保存から質量双極子が変化することはできない.

Challenge 256 ny

結果として，変化する四重極子だけが重力波を放出できる．* 例えば，お互いの周りを回っている2個の質量は重力波を放出するだろう．また，回転軸に対し円筒対称でない回転物体も放出するだろう．結果的に，回転する腕があると，重力波放出に結び付く．同様の言い方の大部分が，マットレス中の質量に付いてもいえる．その差異を指摘できるか.

Challenge 257 ny

アインシュタインは，源から距離 r の所での振幅 h は遅延四重極モーメント Q の2階微分で，良く近似できることを見出した:

Ref. 171

$$h_{ab} = \frac{2G}{c^4}\frac{1}{r}\mathrm{d}_{tt}Q^{\mathrm{ret}}_{ab} = \frac{2G}{c^4}\frac{1}{r}\mathrm{d}_{tt}Q_{ab}(t - r/c)\,. \tag{181}$$

この式は，重力波の振幅は $1/r$ で減少するだけであることを表している．この性質は電磁波と同じである．さらに，前にある因子が $1.6 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{Wm/s}$と小さいため，物体内で検出可能な長さの変化を生じる四重極変化を作り出すにはとんでもなく巨大な系が必要になる．それを実感するには，いくつかの数値を代入し，$h = \delta l/l = 10^{-19}$の長さの変化を測定できる現在最良の検出器を考えてみてください．検出可能な重力波を人が作り出すのはおそらく不可能であろう.

重力波も，他のすべての波同様，エネルギーを移送する．** 放出仕事率についての一般公式を，距離 l で互いの周りを回っている2個の質量 m_1 と m_2

のように書ける．ここで，φ と $\boldsymbol{A}$ はポテンシャルで，$\boldsymbol{G} = \nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{c\partial t}$ および $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ となる.

* 四重極子は四角形の4辺に4つの極が交互に配置されている．重力では，単極子は点状または2個の球質量で，質量は負になることはないので，四重極子は2個の単極子から成る．地球のように平坦化された球では1個の単極子と1個の四重極子の和で近似できる．同様のことが引き伸ばされた球でも成り立つ.

Vol. III, page ??

** Gravitoelectromagnetismにおいても，重力ポインティングベクトルを定義することができる．電気力学の場合と同じくらいに，定義もその使用も簡単である.

Ref. 165

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

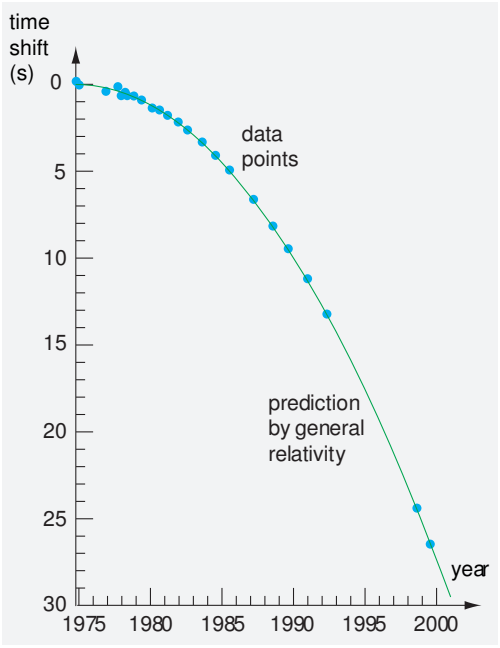


FIGURE 77 2重パルサー PSR 1913+16の近星点の測定された時間の遅れと重力輻射のエネルギー損失の予測値の比較

Ref. 121 に適用すると，

$$P = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{G}{45c^5}\,\ddot{Q}^{\mathrm{ret}}_{ab}\,\ddot{Q}^{\mathrm{ret}}_{ab} = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)^2 l^4\omega^6 \tag{182}$$

となり，ケプラーの公式$4\pi^2 r^3/T^2 = G(m_1+m_2)$を用いると，

$$P = \frac{32}{5}\frac{G^4}{c^5}\frac{(m_1m_2)^2(m_1+m_2)}{l^5}\,. \tag{183}$$

となる．楕円軌道の場合，Goennerの教科書にあるように，放出率は離心率とともに増加する．地球と太陽の場合の値を代入すると，約200 Wの仕事率になり，木星と太陽の系では400 Wの値になる．これらの値は小さすぎて検出するのは無理である．

Ref. 121

すべての軌道系で，波の周波数は軌道周波数の2倍になることを，自分で確かめてみてください． これらの周波数は低く，その検出はさらに困難である．

Challenge 258 ny

結局，今日，重力波の効果の観測は，2重パルサーについてだけである．パルサーは小さいが，極めて密度の高い星で，太陽と同じくらいの質量がありながら，その直径は約10 km位しかない．従って，小さな距離の所を高速でお互い軌道運動している．実際，最も有名な2重パルサー系PSR 1913+16においては，2つの星の軌道長軸が，地球と月の距離の2倍より少し小さい約700 Mmなのに，なんと，7.8 hでお互い軌道運動している．その軌道速度は400 km/sにも達し，系は確実に相対論的である．

パルサーは，ある便利な性質がある．回転しているため，パルサーは（その名前の由来になっているように），極めて正確な周期，しばしば，ミリ秒程度で，ラジオパルスを放出する．そのため，パルスの到着時間を測定することで，

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

その軌道を把握することが容易である．Joseph Taylor* をリーダーとする天文学者のチームは，有名な実験で，今，述べた2重パルサー系の速度の減少を測定した．他のすべての効果を差し引き，20年間データを収集し続け，Figure 77.に示すような軌道周期の減少を発見した．この減速は重力波放出によるものである．その結果は，調整パラメータなしに，一般相対論の予測に一致している．(この効果は時間に対し2乗で依存することをチェックしてみてください.) これは，これまで，一般相対論が $(v/c)^5$ までの精度でテストされた唯一のケースである．この精度は，1周期当たり3.1 mm，つまり，1年あたり3.5 mの軌道直径の減少を検出したことになる．この測定が可能であったのは，この形の2個の星が，サイズの小さい，高速の，純粋に重力相互作用しかしない中性子星であったことによる．軸の周りのパルサーの回転周期は約59 msで，11桁までの精度，そして，軌道周期は7.8 hで，10桁の精度，軌道の離心率は6桁の精度でわかっている．

Ref. 173 Challenge 259 ny Page 145 Ref. 172 Ref. 121

重力波の直接検出は一般相対論の実験の目的の1つになっている．この競争は1990年代から続いている．Figure 78に示すように，基本的な考えは単純である．4つの本体，普通は4枚の鏡があってその1対をつなぐ線と，もう一対をつなぐ線が直角になるように配置されている．この時，各対の長さを測定する．重力波がやってくると，同時に，一方の対は伸び，他方の対は縮む．

検出できる重力波を人類によって作り出すことはできないので，まずは，じっくりと，十分強い波が来るのを待つ必要がある．2つのブラックホールが融合すると，Figure 78にも示す十分強い重力波源になりうる．第2に，10^{-22}のオーダー，または，それ以上の長さの変化を検出できるシステムが必要である．いいかえると，巨額の費用が必要である．検出されると，テレビのニュースになること間違いない．** 検出を成功させるポイントは，検出器の信号に混じっているノイズを除去するテクニックだ．世界中の生え抜きのノイズ除去のエキスパートが重力波検出器に携わっている．

ブラックホールの周りの物体では，静止質量の約6 % しか重力波として放出されれないことがわかっている．さらに，そのエネルギーの大部分は，ブラックホールへの最終落下の際に放出される．ブラックホールの衝突のようなかなり激しいプロセスは，検出可能な重力波源の候補である．

重力波は魅力的な研究領域である．重力波は多くの研究テーマを提供してくれる．たとえば，重力波の速度をどうやれば測定できるかわかるか．まじめに取り組まれているが，測定に成功した人はいない．実際，Figure 78のタイプの間隔をおいておかれた2個の検出器を単に使わないような測定であれば，科学的大事件になるであろう．

Challenge 261 r

この時点で，重力波についてまだ回答を得ていない疑問が残っている．すべての変化が粒子の運動によるものだとしたら，重力をこれにどのようにあてはめたらいいのだろうか． 重力波が粒子から作られるのなら，時空もそうであるべきだろう．この冒険の最終部分まで待ってもらえれば，さらに説明する．

Challenge 262 e

弱い場についてのお楽しみとチャレンジ

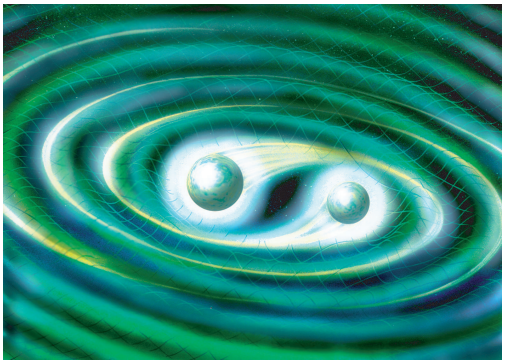
* *

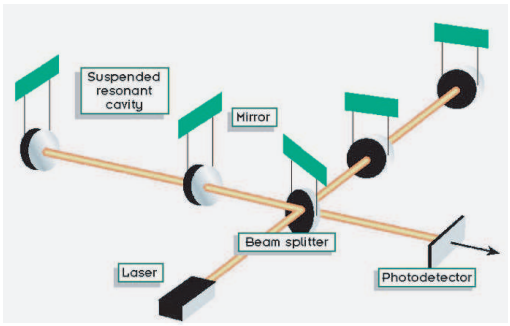
* 1993年，ノーベル物理学賞を受賞した．

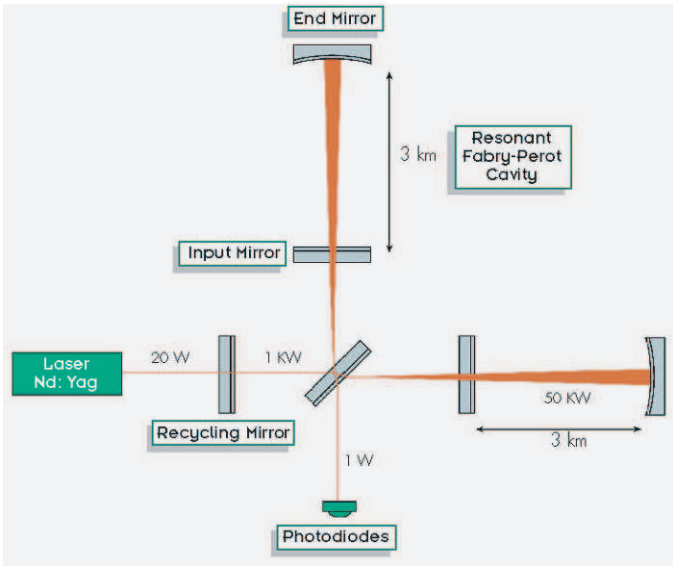
** 重力波の話題は興味深い挿話に事欠かない．たとえば，重力波はロケットの動力に利用できるか．はいとBonnorとPiperが主張している．自分自身で，可能性を考えてみてもいいかもしれない．

Ref. 174 Challenge 260 ny

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net







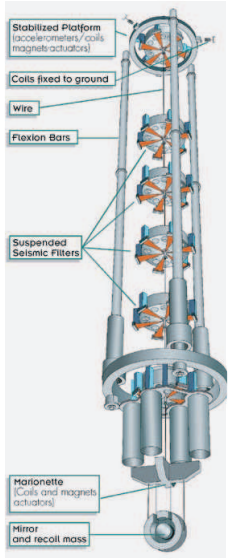


FIGURE 78 重力波の検出：2個のブラックホールが融合することで放出される波の図 (左上) . 他の図はイタリア, CascinaのVIRGO検出器. 1つはつりさげれた大きな鏡, つりさげられた鏡の詳細, レーザー干渉計の図2 (© INFN)

Challenge 263 s 空間的に振動する静的重力場は存在するか.

* *

重力波の速度を体験できると，おもしろい関連性が現れてくる．重力波の速度が光速より小さいとすると，宇宙線のような光速に近い速度で動く物体は，

Page 24 *Vavilov–Čerenkov* 輻射,を放出し，遅い方の速度になるまで減速する．これはあ

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

りえない.

一方，重力波が光の速度より大きいなら，波は因果律または熱力学第2法則に従わなくなる．つまり，重力波が存在するなら，光速で伝播しないといけない．(光速に非常に近い速度ならありうる.)

* *

重力波の検出器を乱す1つの効果として潮汐がある．ハノーバーのGEO600検出器では，潮汐が600 mある鏡間の距離を2 µmだけ変化させた.

* *

光線のように，重力波のビームも細いのか．重力波の2本の平行ビームは互いに引き合うのか.

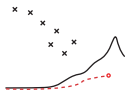
Challenge 264 ny

* *

重力と電磁気の差は重要である．2つの等しい電荷は反発するが，2つの等しい質量は引き合う．もっと練られた言葉を使うなら，スピン2の粒子（重力子）の交換に対しては，質量の効果はマットレスモデルで記述できる．マットレスの効果の符号は質量とは無関係なので，こういう説明が可能である．一方，電磁気では，ポテンシャルの符号は電荷に依存する.

軌道と波のまとめ

まとめると，空間や時空の曲率は，万有引力とはちがい，次のことを意味する．すなわち，軌道は閉じることはなく，軌道物体は空間内での方向を変え，光は質量の周辺で減速し，予想以上に質量により曲げられ，空っぽの真空は重力波を伝播させる．これまで行われたすべての実験は，これらの結論を裏付けている.



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Chapter 7

曲率から運動へ

重力の正確な記述では運動は時空の曲率により決まる．この考えを数値的に表現するには，まず，曲率自身を正確に記述する必要がある．このことをはっきりさせるため，2次元から議論を始め，それから，3次元，4次元へと進める．曲率がわかると，曲率と運動の正確な関係がわかってくる．

2次元での曲率の測り方

明らかに，1枚の平らな紙の曲率はゼロである．紙を円錐や円筒状に曲げると外部曲率というものを獲得する．しかし，紙の上で生きている2次元の動物にとっては，紙のシートは依然として平坦に見える．別の言い方をすると，紙全体は外部的に曲がっていても，紙の内部曲率はゼロである．

内部曲率は，アリが観測する曲率を表す際に，強調される概念である．内部的に曲がっている面は，外部的にも曲がっている．地球の表面，島の表面，山の斜面*は内部的に曲がっている．一般相対論で曲率について語るとき，自然界にいる観測者は，定義から表面に張り付いているアリと同じ状況にあるので，いつも内部曲率を意味している．つまり，これらの観測者が経験，作用，計画するものは，いつも，時空の観測者にきわめて近い所に関連するものだけである．

ところで，アリは，自分が内部的に曲がった面に住んでいるのかどうかをどうやったら決定できるのだろうか．** ひとつのやり方をFigure 79に示す．アリは，円周と測定半径の間にユークリッド的関係が成り立っているかどうかでチェックできる．局所的内部曲率を測定する方法として，円が小さくなる極限をとり，値を正しく規格化すれば，測定値とユークリッド値の差を利用できる．言い換えると，アリは自分の周辺で円板を切り出し，それにアイロンをあてて，円板が引きちぎられるか，しわが寄るかをチェックすればいい．どんな2次元面であっても，アイロンをあててそれから平坦な街路地図が作れなかったら，その面は内部的に曲がっている．しわや破れの「密度」が曲率に関係している．しわは負の内部曲率，破れは正の内部曲率を意味する．

理解度を試してください．1次元平面は内部曲率を持つことは可能なのだろうか．トーラスは内部的に曲がっているのだろうか．

Challenge 266 s

他にも，2本の平行線が，そのまま平行に保たれるか，互いに近づいてゆくか，互いに離れてゆくかをどうかを調べることで，内部曲率を確認できる．円筒にした紙では，平行が保たれる．この場合，この面はゼロの内部曲率を持っ

Challenge 265 e

* 山が完全な円錐形でないとする．これを確認できるか？

** この疑問に対する答えは，平坦な面の曲がった座標系と実際の曲率をどう区別するかも教えてくれる．この疑問は初めて一般相対論を学ぶ人からよく聞かれる．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

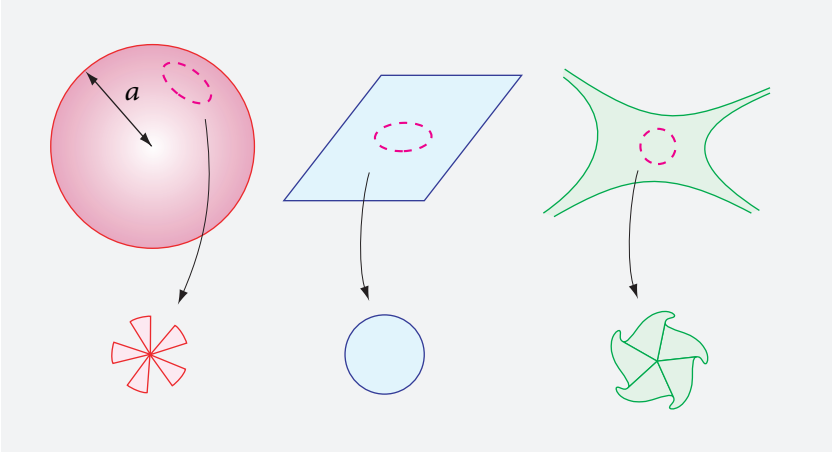


FIGURE 79 2次元の正, ゼロ, 負の曲率

ているという．地球のように，互いに近づく平行線は正の内部曲率を持ち，鞍のように，互いに離れる平行線は負の内部曲率を持つ．簡単に言えば，正の曲率は私たちの動作が多く制限されるのに対し，負の曲率では制限されにくいことを意味する．一定曲率は有限空間に固定される．Figure 79とFigure 81.を用いて，これをチェックしてみてください．平行線がどのくらい速く離れたり近づいたりするかを決定することで内部曲率を測定できる．

Page 174

第3の方法は三角形を使って内部曲率を測定する方法である．曲がった平面上では，三角形の内角の和は π より大きくなる．すなわち，正の曲率では2直角より大きくなり，負の曲率では2直角より小さくなる．

Ref. 175

面の曲率をどのように定量化し，測定するかを詳細に見てみよう．まずは，用語の問題である．半径aの球は，定義により，$K = 1/a^2$ の内部曲率を持つという．従って，平面はゼロの曲率を持つ．球面上の円において，測定された半径 r，円周 C と面積 A の間には

Challenge 267 e

$$C = 2\pi r\left(1 - \frac{K}{6}r^2 + \ldots\right) \quad \text{and} \quad A = \pi r^2\left(1 - \frac{K}{12}r^2 + \ldots\right) \tag{184}$$

の関係があることをチェックしてみてください．ここでドットは高次の項を意味する．この式から，2次元平面上の一般点に対する，ガウス曲率とも呼ばれる，内部曲率 K を定義でき，等価な次の2式のどちらかで表せる．

$$K = 6\lim_{r\to 0}\left(1 - \frac{C}{2\pi r}\right)\frac{1}{r^2} \quad \text{or} \quad K = 12\lim_{r\to 0}\left(1 - \frac{A}{\pi r^2}\right)\frac{1}{r^2}\,. \tag{185}$$

これらの式を用いると，アリも，任意のスムーズな面の各点での内部曲率を測定できる*

---

* n 次元球の体積が $V_n = C_n r^n$ で表せて，その $(n-1)$ 次元表面積が $O_n = nC_n r^{n-1}$ と表せるとすると，

Ref. 176

曲率の式は

$$K = 3(n+2)\lim_{r\to 0}\left(1 - \frac{V_n}{C_n r^n}\right)\frac{1}{r^2} \quad \text{or} \quad K = 3n\lim_{r\to 0}\left(1 - \frac{O_n}{nC_n r^{n-1}}\right)\frac{1}{r^2}\,, \tag{186}$$

Challenge 268 ny

で一般化できることが，Vermeilにより示されている．有名な問題は数 C_n を決定することだ．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

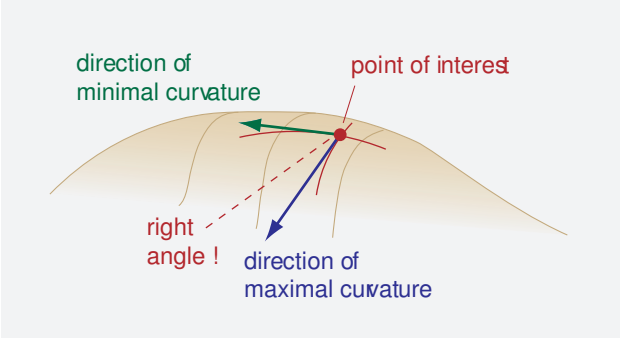


FIGURE 80 ある面の最大曲率と最小曲率はいつも互いに直角をなす.

この本では，以後，曲率は内部曲率，つまり，ガウス曲率とそれを高次元への拡張したものをあらわすことにする．表面のアリと同じように，空間にいる観測者も測定できるのは内部曲率だけである．従って，自然科学で興味があるのは内部曲率だけである．

表面の曲率は場所により異なる可能性があり，卵のようなものは正，トーラスの穴の近くの部分は負になる．鞍は負の曲率を持つ別の例であるが，トーラスと違い，その曲率はあらゆる向きで異なっている．3次元空間の内部に，一定の負の曲率を持つ2次元表面を入れ込むことはできない．状況を想像しようとするとわかると思うが，これを行うには少なくとも4次元空間が必要である．

Challenge 269 e

任意の面のどの点でも，最大曲率と最小曲率の方向は，互いに，直交する．Figure 80に示すこの関係は，18世紀にレオナルド・オイラー (Leonhard Euler) により示された．このことは，ヘンリー・ムーア (Henry Moore) の彫刻のついたティーカップ，フォルクスワーゲンビートルのような周辺の曲がった物体でチェックできるだろう．(185) で定義されるガウス曲率 K は，実は，これらの2つの曲率半径の逆数の積になっている．従って，たとえ，線の曲率が固有の性質にならなくても，ガウス曲率はそうなる．

Challenge 270 e

ガウス曲率は面の各点の所での固有の性質である．これはすでに述べたように，表面を曲げても各点のその値は変わらないことを意味する．例えば，1枚の平坦な紙を丸めて筒状にしたり，折り曲げても，内部曲率はゼロである．平坦なシートの内部曲率，つまり，ガウス曲率はゼロなので，どんな曲げたシートのどの点でも，いつも，曲率ゼロの線が一本は存在する．曲がったシートであっても，それは直線から構成されている．この性質は，ガウス曲率が形に依存しないという性質によるものである．この性質のため,曲げられたシート － 平坦なシートではない － をさらに曲げようとしても，それは直線を曲げようとすることであり，固くて曲げられない．この性質は，直管，円錐や折られた紙が固くて軽い構造をもつ理由である．同じ理由から，ピザスライスを持つ時のうまい方法は，中心半径に沿って折り曲げることである．

また，回転双曲面や双曲放物面の形の屋根は強靭で，その面のどの点でも，そこを通る2つの直線がある．これらの面は曲げられた平面シートから作れるか．

Challenge 271 s

まとめると，ガウス曲率は2次元面の内部曲率の尺度となる．私たちが調べようとする表面や空間の内部を，無理やり移動したり，そこにとどまったりするには，このような曲率の内部尺度が必要になる．このことはすべてのヒトに

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

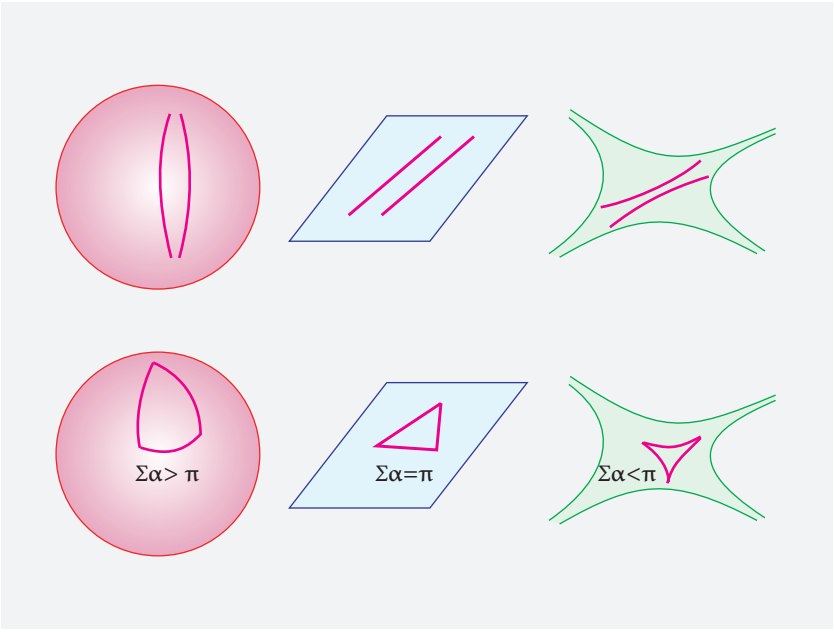


FIGURE 81 測地線の振る舞いと一緒に表示した正, ゼロ, 負の (2次元) 曲率と三角形の内角の和の図

当てはまるので，物理学者は，特に，2次元より大きな次元 での内部曲率に興味があるのだ.

3次元：空間の曲率

3次元空間の場合，内部曲率を記述しようとすると，もう少し踏み込む必要がある．まず，私たちは，普通，曲率を外部曲率と考えてしまうことから，この状況を想像するのがなかなか難しい．実際，3次元の空間曲率を調べる方法は，面上のアリのように考えて，内部曲率に集中することしかない．3次元曲率の記述にあたっては，2次元曲率の記述が参考になる.

曲がった三次元空間では，一般的な点の周りの任意の小さな2次元円板のガウス曲率は円板の方向に依存するだろう．まず，一番単純な場合を考えてみよう．ある点のガウス曲率が円板のすべての方向に対して同じ場合，この点は等方的であるという．この点の回りに小さな球を考える．この場合，3次元での，球の測定半径 r と測定表面積 A と体積 V の関係は

Challenge 272 ny

$$A = 4\pi r^2 \left(1 - \frac{K}{3} r^2 + \dots\right) \quad \text{and} \quad V = \frac{4\pi}{3} r^3 \left(1 - \frac{K}{5} r^2 + \dots\right), \tag{187}$$

のようになる．ここで，K は等方的な点での曲率であり，

$$K = 3 \lim_{r \to 0} \left(1 - \frac{A}{4\pi r^2}\right) \frac{1}{r^2} = 6 \lim_{r \to 0} \frac{r - \sqrt{A/4\pi}}{r^3} = 6 \lim_{r \to 0} \frac{r_{\text{excess}}}{r^3}, \tag{188}$$

とあらわせる．ここで*excess radius*を $r_{\text{excess}} = r - \sqrt{A/4\pi}$ と定義する．つまり，

▷ 3次元空間では，平均曲率は小球の*excess radius*を半径の3乗で割り，

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

それを6倍したものである.

曲率が正の場合は，excess radiusも正で，ゼロと負の曲率についても同様のことが言える．ある点の平均曲率は小球の定義を，任意の非等方的点に適用することで計算できる.

3次元空間の非等方的な点では，2次元円板で決定されるガウス曲率は，円板の方向に依存するだろう．実際，ある点でのすべての可能な円板のガウス曲率の間ではある関係があり，それらはテンソルを構成すると考えられる．(なぜか.) Challenge 273 ny 言い換えると，ガウス曲率は各点で楕円体を定義している．曲率の完全記述のためには，3次元の任意のテンソルに関し，楕円体の主軸に対応する3つの直交方向の主ガウス曲率値を確定しないといけない．*

私たちを囲む3次元空間はどのぐらいの曲率になっているのだろう．1827年には，もう，数学者であり物理学者であるカール・フリードリヒ・ガウス (Carl-Friedrich Gauß) ** は，自分の住居の近くの3つの山により作られる三角形の内角の和がπにになるのかどうかをチェックしたと言われている．現在，質量 M，半径 r の物体の表面での π からのずれ δ は,

$$\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \approx -A_{\text{triangle}} K = A_{\text{triangle}} \frac{GM}{r^3 c^2} \,. \tag{189}$$

で，表せることがわかっている．この式は双曲線幾何学特有のものである．数学的に負の曲率Kの場合については，ヨハン・ランベルト (Johann Lambert) ***が初めて式を導出した．最後の等式が導出されたのは，それから1世紀半後のことで，アインシュタインによる．彼は，私たちの周り空間の曲率 K が負の時，この曲率は物体の質量と重力が関係していることを明らかにした．地球と典型的な山の間隔を用いると，角度 δ は10^{-14} radのオーダーになる．ガウスはこのようなずれを観測する機会もなかったし，実際，何も検出していない．現在のレーザと高精度の機器を用いた地球上での研究でも，まだ，ずれは検出されていない．地球表面上の時空曲率を決定する比例因子は，あまりにも小さすぎるのだ．しかし，ガウスは，今日の私たちなら知っていること，つまり，重力と曲率は深い関係で結びついているということを知らなかった.

---

* これらの3つの円板値は独立ではない. なぜなら, これらの値から先述した体積平均曲率Kが生成されなければならないからである. 結局は, (各点の) 3次元の曲率を記述するため, 3つの独立したスカラーを用いる. 計量テンソル g_{ab} とこれから導入するリッチテンソル R_{ab} を用い, $R = -2K$, $R_{ab}R^{ab}$ と $\det R/\det g$ を3つの独立な数として採用することが可能になる.

** カール・フリードリヒ・ガウス (Carl-Friedrich Gauß) (b. 1777 ブラウシュヴァイク, d. 1855 ゲッチンゲン)は, レオナルド・オイラーとともに, 歴史上, 最も有名な数学者である. 神童として有名で, 19際の時に, コンパスと定規で正17角形を作った (www.mathworld.wolfram.com/Heptadecagon.html参照). 彼はそのことを誇りにしており, 自分の墓石にその図形を描いた. 彼は, 現代数学の分野になっている数論, トポロジー, 統計, 代数, 複素数, 微分幾何学で多くの結果を残し, 後世の数学の発展の基礎となっている. 多くの業績の中の一つが, 曲率の理論と非ユークリッド幾何学を作り出したことである. また, 電磁気学や天文学の研究も行った.

ガウスは性格的には難しい人で, 研究はいつも自分ひとりで行っており, 学派を設立することはなかった. 彼のモットーはpauca sed matura (寡なれど熟) で, 発表はあまりない. 結果として, 別の数学者が新しい発表を行なうと, 彼は, いつも, 数年前にまったく同じ結果をすでに記したノートを出した. この有名なノートは, オンラインで見ることができる (www.sub.uni-goettingen.de) .

*** ヨハン・ランベルト (Johann Lambert) (1728–1777), スイスの数学者, 物理学者, 哲学者. 多くの業績の一つが, πが無理数であることの証明がある. また, 光学の法則に彼の名前が付いた法則がある.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

時空の曲率

> Notre tête est ronde pour permettre à la pensée de changer de direction.*
>
> Francis Picabia

自然を，4次元時空とみて，曲率を指定しようとすると，さらに，立ち入る必要がでてくる．まず，時空座標を用いると，光速 c が極限の速度として自動的に組み込まれる．さらに，4という次元のため，いくつかの型の曲率が登場することになる．まず，ある点での平均曲率の値がある．これは，時空の4元球の4元体積と測定された半径から導かれたものを比較することで定義される．次に，さまざまな方向を向いた3元球の3元体積で定義される「大体の平均」曲率の組，さらに，もっと多くの方向を向いた普通の2元円板の2元面積で定義される「低いレベル」の曲率の組が考えられる．もちろん，この組には従うべき規則を持ち込む必要がある．

うまいことには，物理学の助けで数学は簡単になる．まずは，時空の曲率が何を意味するかの定義から始めよう．これを行うに当たり，Figure 81の曲率の定義を使用する．図示するように，曲率 K は測地線がどのように発散や収束かもあらわしている．

測地線とはある面のもっとも真直ぐな径路である．つまり，小さな車や小さな三輪車がハンドルを切らずに真直ぐ保ったままで，その面上を運転したときにたどる径路である．局所的に見れば，近くの測地線は平行である．近接した2本の測地線が曲がった空間にあると，測地線に沿って進むにつれ，2本の線の間の距離sは変化する．これは Challenge 274 e

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}l^2} = -Ks + \text{higher orders} \tag{190}$$

であらわせる．ここでlは測地線に沿う距離である．また，K は局所的な曲率，つまり，曲率半径の自乗の逆数である．時空の場合，この関係式は，固有長を固有時間で置き換えることで拡張できる．これにより，測地線間距離と曲率は

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\tau^2} = -Kc^2 s + \text{higher orders}\,. \tag{191}$$

関係づけられる．これは，加速度の定義である！時空での測地線とは自由落下ののたどる径路である．つまり，純粋に空間の場合には，曲率と呼ばれるものが，時空の場合には，近接した2個の自由落下する粒子の相対加速度になる．本当は，この加速は，すでに，登場している．潮汐効果と呼ばれているものだ．つまり，時空曲率と潮汐効果はまったく同じものである． Vol. I, page ??

当然，潮汐効果，つまり，曲率の大きさは方向，もっと正確には，2つの粒子により作られる時空面の方向に依存する．Figure 82が示すように，潮汐効果の符号，つまりは，その方向に依存する．互いに上下方向の粒子は発散し，隣合う粒子は収束する．

* ‘私たちの頭がまわるのは，思考の方向を変えることができるようにするためだ．’ Francis Picabia (b. 1879 パリ, d. 1953 パリ) ダダイスト，シュールリアリストの画家

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

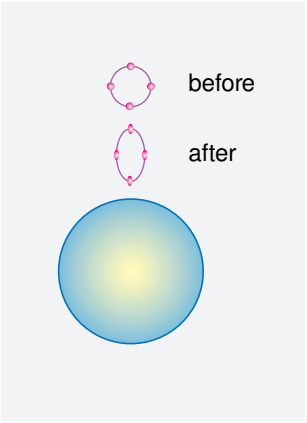


FIGURE 82 潮汐効果と時空の曲率

曲率の定義からすると，K はテンソルであることも意味する．そのため，あとで，そのために添字をつけることになる．(何個か) おもしろいことに，当面は，空間曲率の特殊な組み合わせを考えるので，添え字は省略できる．互いに直交し，ある点で交差する3つの平面を空間に取ると，これらの3つのいわゆる断面曲率の和は観測者に依存しない．(これはテンソルのトレースに対応する.) 今示した，曲率の定義を用いてこれを示せるか?

Challenge 275 ny

Ref. 177

Challenge 276 ny

互いに直交する平面 $K_{(12)}$, $K_{(23)}$ および $K_{(31)}$ で定義される3つの断面曲率の和は，前に定義したexcess radiusに関係している．どういう関係になるかわかるか?

Challenge 277 ny

表面が一定曲率を持つ時，つまり，すべての場所で曲率が同じ時には，物体を移動しても幾何的形状は変形することはない．これを描けるか?

Challenge 278 e

まとめると，時空の曲率とは，時空がどのように変形するかをあらわす直感的な概念である．時空の局所的曲率は，近くの自由落下する粒子の運動により決定される．空間 (または時空) を，ふわふわしたゴム状のマットレスのように考えるなら，ある点の曲率とはそこでこのマットレスがどのように締め付けられるかをあらわしている．そのマットレスの内側で私たちは生きているので，その変形を知るには，excess radiusや断面極率のような「内部」法を用いる必要がある．

Ref. 178

一般相対論は難しいとしばしば考えられるが，これは，真空をマットレスのように考えることに抵抗があり，そういう風に説明されることが少ないからである．100年にわたり，物理学者は真空は空であるということを信条としてきた．これは正しい．しかし，真空を，マットレスや物質と見ると，多くの意味で一般相対論を理解する助けになる．

一般相対論における平均曲率と運動

一般相対論の半分は，どんな物体も測地線，つまり，最大固有時間の径路に沿って運動することを説明している．一般相対論の，もう半分は，ある1つの式に含まれている．どの観測者にとっても，ある点の3つの固有断面空間曲率の和，つまり，平均曲率は

$$K_{(12)} + K_{(23)} + K_{(31)} = \frac{8\pi G}{c^4} W^{(0)} \tag{192}$$

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

で表せる．ここで，$W^{(0)}$はその点での固有エネルギー密度である．下付き添え字は，3つの方向1，2，3で定義される混合曲率を表す．一般相対論を1つのパラグラフで表すとこうなる．

時空は質量とエネルギーの周辺で曲がっている．式 (192) は，質量とエネルギーが空間をどの位曲げるかを示している．右辺の因子は 2π を最大力で割ったものであることに注意してほしい．

前に定義したexcess radiusを用い，質量 $M = VW^{(0)}/c^2$ を導入すると，等価な式を簡単に見つけることができる． その質量を含んだ球体積 V の表面積 A に対し，

Challenge 279 e

$$r_{\text{excess}} = r - \sqrt{A/4\pi} = \frac{G}{3c^2}M \,. \tag{193}$$

が得られる．つまり，どの観測者にとっても小球の*excess radius*は球内部の質量で与えられることを，一般相対論は主張している．*

いずれの式も，空っぽの空間では，ある点の平均空間曲率はゼロになることに注意してほしい．これは，これから見るように，球質量の近くでは，質量に向かう曲率のマイナスは質量の周りの曲率の2倍に等しく，総和はゼロになる．

曲率は各点で異なる．特に，この2つの式が示すのは，もしエネルギーが移動すると，曲率もそれとともに移動することである．つまり，空間曲率も，後述するように，時空曲率も空間と時間上で変化する．

Challenge 280 ny

ちなみに，曲率は厄介な効果を生じることも注意しておく．離れた観測者間の相対速度は定義できない．これを説明できるか． 曲がった空間においては，相対速度が定義できるのは近傍の物体に対してだけである．実際は，完全に離れていない物体に対してだけである．離れた物体の相対速度が定義できるのは，平坦な空間においてだけである．

式 (192) に現れる量は観測者に依存しない．しかし，しばしば，観測者依存の量を使いたくなる．その場合，この関係はもっと込み入ったものになる．1つの式 (192) をアインシュタインの場の方程式と呼ばれる10個の式に展開しないといけない．これは後に導入するが，その前に，一般相対論が道理にかなっていることをチェックしよう．極限として，特殊相対論を含むことのチェックはとばし，直接，主要テストにはいる．

万有引力

> 私がここにとどまる理由は，ただ一つ，重力である．
>
> 作者不明

低速度で小曲率の場合，時間曲率 $K_{(0j)}$ は，ある特別な性質を持つようになる．この場合，これはたったひとつのスカラー関数 φ の空間2階微分として

Ref. 179

* 別の等価な式として，小半径の場合，面積Aは，

$$A = 4\pi r^2 \left(1 + \frac{1}{9}r^2 R\right) \tag{194}$$

で与えられる．ここでRは，後に導入するリッチスカラーである．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 281 e 定義できる． 日常の状態では，

$$K_{(0j)} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^j)^2} \,. \tag{195}$$

と表せる．日常ではこの近似はよく成り立ち，関数 φ は重力ポテンシャルになっている．実際，低速で小曲率ということは，$W^{(0)} = \rho c^2$ と書くことがき，$c \to \infty$ に対し，

$$K_{(ij)} = 0 \quad \text{and} \quad K_{(01)} + K_{(02)} + K_{(03)} = \Delta\varphi = 4\pi G\rho \,. \tag{196}$$

となる．すなわち，低速度では空間は平坦で，ポテンシャル φ はポアソン方程式を満たす．つまり，万有引力は，実は，一般相対論の低速で小曲率の極限なのだ．

Challenge 282 ny 曲率とエネルギー密度の関係をあらわす式 (192) は，もっと正確な近似では，前に述べたように，質量近辺の時間は高さに依存することを示せるか．

Page 127

シュワルツシルト計量

Ref. 177 球体質量の周りの時空の正確な曲率はどうなるのだろうか．その答えは，1915年，カール・シュワルツシルト (Karl Schwarzschild) により与えられた．彼は，第一次世界大戦に従軍中，この解を計算した．アインシュタインは彼の名前をこの解に付けた．

Page 134 球面座標で，線素は

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} - r^2 \mathrm{d}\varphi^2 \,. \tag{197}$$

Challenge 283 ny であらわせる．シュワルツシルト計量の曲率は，この時，あらゆる場所で

$$\begin{aligned} K_{r\varphi} = K_{r\theta} &= -\frac{G}{c^2}\frac{M}{r^3} \quad \text{and} \quad K_{\theta\varphi} = 2\frac{G}{c^2}\frac{M}{r^3} \\ K_{t\varphi} = K_{t\theta} &= \frac{G}{c^2}\frac{M}{r^3} \quad \text{and} \quad K_{tr} = -2\frac{G}{c^2}\frac{M}{r^3} \end{aligned} \tag{198}$$

Ref. 177 となる．依存性$1/r^3$はすべての潮汐効果依存性によるものである．すでに，私たちは万有引力の章でこれを計算している．因子 G/c^2 は重力の最大力によるものである．数値因子のみを一般相対論から計算する必要がある．真空のすべての点では，平均曲率は当然ゼロになる． 予想通り，地球表面近傍での曲率値は極めて小さい．

Vol. I, page ??

Challenge 284 ny

曲率についての興味と楽しみ

> “Il faut suivre sa pente, surtout si elle monte.*”
> アンドレ・ジード (André Gide)

* ‘人は自分の好み従う必要がある．特に，高みを目指すときには．’

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

円筒形のガラスのコップの縁から1 cm下のところにハエがとまっている．一滴のはちみつがコップを半周した所の外側，縁から2 cm下に付いている．ハエからそのはちみつの滴までの最短距離はいくらになるか? 滴がコップの内側にある時はどうなるか.

Challenge 285 e

* *

卵のガウス曲率の最大値と最小値はどこか?

Challenge 286 e

3次元曲率: リッチテンソル*

> Jeder Straßenjunge in unserem mathematischen Göttingen versteht mehr von vierdimensionaler Geometrie als Einstein. Aber trotzdem hat Einstein die Sache gemacht, und nicht die großen Mathematiker.
> デイヴィッド・ヒルベルト (David Hilbert) **

さて，曲率の感覚はつかめたので，任意の観測者が任意の別の観測者に曲率をどのように伝えたらいいかについて説明しよう．残念ながら，これにはテンソルの公式を使用する．これらの公式は手ごわそうに見えが，これに取り組むことで，各式の中に含まれている本質が見えてくる．(たとえば，当面，添字を忘れ) 式にちりばめられている小さな文字に惑わされずに，式の中から本質をつかみだすことに努める.

先に述べたように，4次元時空は，2次元曲率，3次元曲率，および4次元曲率で記述できる．一般相対論への導入の多くは，3次元曲率から入ってゆく．3次元曲率は，半径から計算された3次元体積と実際の3次元体積の間の違いを説明する．詳細はリッチテンソルで記述される．*** 測地線偏差を調べると，自由落下する球状雲の形状が径路とともにどう変形してゆくかをリッチテンソルにより表せることがわかってくる．もっと正確には，リッチテンソル R_{ab} は，雲の体積の2階 (固有) 時間微分を雲の体積で割ったものである．真空中では，このような落下する雲の体積は，潮汐力による変形にもかかわらず，いつも一定である．Figure 82は重力は雲の体積を変えないことを表している．つまり，リッチテンソルはポテンシャルのラプラシアン $\Delta\varphi$, もっと正しくは $\Box\varphi$ の一般相対論版である.

Page 177

平均曲率：リッチスカラー

もっとも包括的で，微に入らない曲率の定義は，測定半径から計算された4次元体積と実際の4次元体積の差異を記述するものである．これはある時空点の平均曲率，いわゆるリッチスカラー R で表される．このテンソルの定

** '私たちの数学ゲッチンゲンの腕白どもはみんな, アインシュタインより4次元幾何についてはよく知っている. しかし, その成果を出したのはアインシュタインであって, 偉大な数学者ではない.'

** 初めて読む人は, この章の残りはとばしてもよい.

*** グレゴリオ・リッチ-クルバストロ (Gregorio Ricci-Cubastro) (b. 1853 ルーゴ, d. 1925 ボローニャ), 数学者. 彼は「リッチ計算法」とも呼ばれる絶対微分学の父. トゥーリオ・レヴィ-チヴィタ (Tullio Levi-Civita) は彼の生徒.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

義は

$$R = -2K = \frac{-2}{r^2_{\text{curvature}}} \,. \tag{199}$$

である．リッチスカラーは，リッチテンソル対し，いわゆる，縮約操作を行うことで得られる．縮約はまさに平均操作である．2階テンソルにおいては，縮約はトレースをとることと同じである．

$$R = R^{\lambda}{}_{\lambda} = g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} \,. \tag{200}$$

リッチスカラーは空間と時間上で曲率を平均したものである．落下する球状雲のイメージでは，リッチスカラーは雲の体積変化を記述する．リッチスカラーは真空中ではいつもゼロになる．この結果から，空間曲率を地球上の高度で表された時間変化に関連付けることができる．

Challenge 287 ny

アインシュタインテンソル

2年間の苦労の末，アインシュタインは自然界の曲率を記述するのに最良の量はリッチテンソル R_{ab} ではなく，それから作られたあるテンソル量であることを発見した．これがいわゆるアインシュタインテンソル G_{ab} で，(宇宙定数がゼロの場合は,) 数学的に

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \,. \tag{201}$$

で定義される．その意味を理解するのは難しくない．値 G_{00} は，0 方向に垂直な面の断面曲率の和で，つまりは，すべての空間断面曲率の和

$$G_{00} = K_{(12)} + K_{(23)} + K_{(31)} \,. \tag{202}$$

である．同様に，各次元 i についての対角成分 G_{ii} は，i 方向に垂直な面の断面曲率の (計量の負の符号も考慮した) 和である．例えば，

$$G_{11} = K_{(02)} + K_{(03)} - K_{(23)} \,. \tag{203}$$

となる．リッチテンソルとアインシュタインテンソルの違いは，断面曲率の関連付け方にある．つまり，リッチテンソルでは注目している座標に含まれる円板を考えるのに対し，アインシュタインテンソルではその座標に垂直な円板を考える．両方とも時空曲率を平等に記述し，一方を固定すると他方も固定する．(アインシュタインテンソルのトレースと行列式は何であるか.)

Challenge 288 d

アインシュタインテンソルは対称である．このことは，このテンソルには*10*個の独立成分があることを示している．もっとも，重要なのは，その発散がゼロになるということで，すなわち，保存量であることを表している．これは，アインシュタインが質量とエネルギーを数学的な言い方で関連付けることを可能にした重要な性質である．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

運動量, 質量とエネルギーの表現

重力を完全に記述するには, どの観測者も他の観測者に伝えられるような形で, 運動量とエネルギーの運動を定量化しないといけない. 相対論的な式では, 運動量とエネルギーは, いつも, いっしょに現れることを説明した. 次は, どうすれば, これらの運動が一般の観測者向けに定量化できるかを見つけることである.

まず, エネルギーを表す量を, 特殊相対論のエネルギー-運動量ベクトル $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = (\gamma mc, \gamma m\boldsymbol{v})$ を用いて定義しなければならない. いま, この量をTであらわす. さらに, T は単一粒子をあらわすのではなく, 時空に広がるエネルギー-運動量の分布の広がり方をあらわすものである. つまり, エネルギーと運動量の密度を記述するのに, Tはもっとも最も実際的な量である. 従って, T は場ということになり, 時間と空間に依存するものなので, 普通, $T = T(t, x)$ と表記される.

エネルギー-運動量密度 T は, 時間と空間上での密度を表しているので, 各時空点およびその点のところの微小面積 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ に対し, その面を通過するエネルギー-運動量流 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ を定義する. つまり, T は関係式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = T\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}\,. \tag{204}$$

で定義される. 面は法線ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ で特徴づけられるとする. エネルギー-運動量密度は2つのベクトル間の比例因子なので, T はテンソルである. もちろん, ここでは4元流と4元表面のことをいっている. 従って, エネルギー-運動量密度テンソルは次のように分けることができる.

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} w & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ S_2 & t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ S_3 & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \text{エネルギー密度} & \text{エネルギー流 または 運動量密度} \\ \hline \text{エネルギー流 または 運動量密度} & \text{運動量流密度} \end{array}\right) \tag{205}$$

ここで, $w = T_{00}$ は3次元スカラー, $\boldsymbol{S}$ は3次元ベクトルおよび t は3次元テンソルである. 全体の量 T はエネルギー-運動量 (密度) テンソルと呼ばれる. これは2つの重要な性質を持っている. つまり, 対称であるということと発散がゼロであるということだ.

テンソル T の対称性は角運動量保存の結果である. テンソル T の発散がゼロになることは, しばしば,

$$\partial_a T^{ab} = 0 \quad \text{or} \quad \text{abbreviated} \quad T^{ab}{}_{,a} = 0\,, \tag{206}$$

のように書かれるが, これは, このテンソルが保存量であることを意味する. ある体積内で, エネルギーは, 表面を通ってゆく流れにより変化してゆく. テンソルで記述されたエネルギー-運動量は, 位置, 方向, 速度および加速度の異なるどんな観測もこの結果について互いにコミュニケートできるという要求をみたしていることを示せるか?

Challenge 289 ny

エネルギー-運動量密度テンソルを用いると, 時空上のエネルギー, 運動量や質量の分布を完全に記述できる. 例として, 移動液体のエネルギー-運動量

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

分布を決定してみよう．密度 ρ，圧力 p と4元速度 $\boldsymbol{u}$ の液体に対し，

$$T^{ab} = (\rho_0 + p)u^a u^b - pg^{ab} \tag{207}$$

となる．ここで，ρ_0 共動系で測定された密度，いわゆる，固有密度である* ρ，ρ_0 および p は空間と時間に依存する．

もちろん，特定の物質流に対し，圧力 p と密度 ρ がどう関係しているかを知る必要がある．物質のキャラクタリゼーションから関係

$$p = p(\rho)\,. \tag{209}$$

を知る必要がある．この関係は物質の性質であり，相対論からは決めることはできない．物質の構成要素または輻射と相互作用から求められるべきものである．可能性のある形態でもっとも簡単なものはダスト，つまり，相互作用をまったくしない点粒子からなる物質である．**

すべての時間と場所で，エネルギー-運動量テンソルの発散はゼロになる．自分でチェックしてみてください． Challenge 291 ny この性質は前述したアインシュタインテンソルと同じである．しかし，その前に，少しコメントをする．私たちは重力エネルギーを考慮しなかった．重力エネルギーは一般的には定義できないことがわかっている．一般に，重力はそれに付随するエネルギーを持っていない．弱い場，ゆっくりとした運動，漸近的に平坦な時空のような特別な状況下で，負のエネルギーとして，アインシュタインテンソルの G^{00} 成分の積分を定義できる．重力エネルギーは，われわれの日常においてのみ，近似的に定義できるだけである．***

アインシュタインの場の方程式

> [アインシュタインの一般相対論] は無神論のおぞましい姿を覆っていた．
> ボストンからのウィッチハンター，1935年頃

> 神の存在を信じますか．50語料金支払い済み返信．
> 別のウィッチハンターから彼のヒーロー，アインシュタイインへの続きの電報

---

* 共動系では，

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}\,. \tag{208}$$

が，成り立つ．

** たとえ，一般相対論が点粒子の存在を許さなくても，粒子間隔が粒子サイズと比べて大きいときはこの近似が成り立つ．この場合の，エネルギー-運動量テンソルは

$$T^{ab} = \rho_0 u^a u^b\,. \tag{210}$$

であらわされる．液体との違いを説明できるか？ Challenge 290 ny

*** この近似は，宇宙の全エネルギーはゼロであるという有名な推論に結びつく．あなたは同意しますか？ Challenge 292 s

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

> 実在する規則正しい調和の中に現れるスピノザの神なら信じます. 人間の運命や行為として現れる神は信じません.
> アルベルト・アインシュタインの答

アインシュタインの有名な場の方程式は多くの宗教的不安の種だった. それは一般相対論の完全な記述を含んでいる. この方程式を導く方法はたくさんある. 最も簡単な方法は最大力の原理から出発するやり方である. 他には, 後述するヒルベルトの作用から方程式を導くやり方もある. 第3は, 現在行っている方法, つまり, 曲率とエネルギーの関係を一般的な観測者へ拡張する方法である.

Page ??
Page 187

アインシュタインの場の方程式は,

$$G_{ab} = -\kappa\, T_{ab}$$

または, もっと詳しく

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R - \Lambda g_{ab} = -\kappa\, T^{ab} \quad . \tag{211}$$

で与えられる. 定数 κ は重力結合定数と呼ばれるもので, 測定より

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 2.1 \cdot 10^{-43}\,/\mathrm{N} \tag{212}$$

と小さい値である. つまり, 2π を最大力 $c^4/4G$ で割ったもので, 日常における重力の弱さ, もっと適切な言い方をすれば, 時空を曲げることの難しさをあらわすものである. 定数 Λ は, いわゆる宇宙定数で, 真空のエネルギー密度, または, 圧力 Λ/κ に対応している. この小さな値を測定するのは相当難しい. 現在, よく使われる値は,

Page 227

$$\Lambda \approx 10^{-52}\,/\mathrm{m}^2 \quad \text{または} \quad \Lambda/\kappa \approx 0.5\,\mathrm{nJ/m^3} = 0.5\,\mathrm{nPa}\,. \tag{213}$$

Ref. 181

である. 最近の測定結果やシミュレーション結果からは, 宇宙の現在の半径の二乗の逆数に近い値が示唆されているが, このパラメータは時間によらず一定な自然の定数である.

まとめると, 場の方程式が表しているのは, ある点の曲率は, その点を通る, 真空エネルギー密度も考慮したエネルギー-運動量流に等しいということである. つまり, エネルギー-運動量が, 比例定数として最大力を用い, 時空にどうやって曲げるかを教えている. *

---

* アインシュタインは, 場の方程式の導出に際し, 文献の中で原理と呼んでいる思想的ガイドラインを用いている. 今日, その多くは, あまり中心的なものとして扱われなくなっている. ともかく, 簡単に見ておこう.

- 一般相対論の原理: すべての観測者は等価である. この原理はよく言及されるが, 物理的内容はあまりないだろう.

Ref. 182

- 一般的共変性の原理: 物理の方程式はテンソル形式で記述されなければならない. 今日, すべての方程式はテンソルで記述できることはよく知られている. 万有引力においてすらそうである. しかし, 多くの場合, 非物理的な「絶対的」要素が含まれている. 例えば, 他の物には影響を及ぼすが, 自らには及ぼさない量がそうである. この非物理的考えは内部的相互作用の考えと相反する. これについては後で述べる.

Vol. III, page ??

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

再び, 万有引力

速度が小さくなると, 一般相対論の場の方程式は簡単化できる. この場合, $T_{00} = c^2\rho$ となり, T の他のすべての成分はゼロになる. 定数 κ の定義を用い, $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$で$\varphi = (c^2/2)h_{00}$ とおくと,

Challenge 293 ny

$$\nabla^2\varphi = 4\pi\rho \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\nabla\varphi \tag{214}$$

となる. これは, おなじみの式で, 次のように言い換えることができる. 質量 M の物体の近くの質量 m の物体は,

$$a = G\frac{M}{r^2}, \tag{215}$$

で加速され, 値aは落下物体の質量 m には依存しない. 実際, ガリレオにより指摘されているように, すべての物体は, そのサイズ, その質量, その色などとは無関係に, 同じ加速度で落下する. 一般相対論でも重力は民主的である. * 自由落下が落下物体の質量に無関係であることは, 時空を曲がったマットレスのように記述してもそうなる. マットレス上で動く物体も同じ運動, つまり, 質量値とは無関係な運動をする.

- 最小結合の原理: 重力場の方程式は, もっとも単純な一般化を行うことで, 特殊相対論の式から見出すことができる. もちろん, この式は有名になり, 実験的に検証されるようになった今では, この原理は歴史的興味にすぎない.

- 等価原理: 局所的には, 加速と重力は区別できない. 時空は半リーマン的で, 重力はその曲率であることを主張するのに使われる.

- マッハの原理: 慣性とは宇宙の残りとの相互作用である. 一般相対論では満足されていないとしばしば言われるが, この原理は正しい. ともかく, 一般相対論の本質ではない.

Page 243

- 重力質量と慣性質量の同一性: これははじめから質量の定義に含まれているが, 一般相対論の教科書にはいやになるほど登場する. リーマンテンソルの定義にそれとなく使用されている.

- 対応原理: 一般相対論のように, 新しくて一般的な理論は, 前の理論が正しい領域に限定された時には, 前の理論に戻ることができないといけない. この場合, 万有引力や特殊相対論が前の理論にあたる.

* 一般相対論が万有引力に合っていることを示す別の方法がある. リーマンテンソルの定義から, 相対加速度 b_a と近くの粒子の速度は

$$\nabla_e b_a = R_{ceda}v^c v^d\,. \tag{216}$$

で関係づけられることを知っている. R の対称性から, $b_a = -\nabla_a\varphi$であるようなφが存在する. これは,

$$\nabla_e b^a = \nabla_e\nabla^a\varphi = R^a_{ced}v^c v^d \tag{217}$$

を意味し,

$$\Delta\varphi = \nabla_a\nabla^a\varphi = R^a_{cad}v^c v^d = R_{cd}v^c v^d = \kappa(T_{cd}v^c v^d - T/2) \tag{218}$$

となる. $T_{ab} = \rho v_a v_b$ を用いると, 予想通りの

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{219}$$

という結果が得られる.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

場の方程式の理解

完全な場の方程式の感覚をつかむために，主要な性質について，簡単に触れる．まず，時空曲率によるすべての運動は可逆で，微分可能であり，従って，決定可能である．ただし，時空と物質とエネルギーの完全な運動についてのみこれらの性質を持つ．粒子の運動についてだけは，普通，重力輻射が放出されているので，実際は，不可逆である．

Challenge 294 e

宇宙定数がゼロの場合，場の方程式を縮約することで，リッチスカラーに対する次の式が求まる．

$$R = -\kappa T \,. \tag{220}$$

この結果はexcess radiusと球内部の質量の関係も含まれている．

Challenge 295 ny

場の方程式は計量 g に対し非線形である．このことは，解の和をとっても，一般的に，解にはならないことを意味している．このため，解を調べる際，やっかいなことになる．場の完全な解のためには，初期条件と境界条件が指定されなければならない．これを取り扱う方法が数理物理の1つの分野になっているが，ここでは立ち入らない．

Ref. 183

一般相対論は場の方程式 (211) の一つの側面を理解させてくれるが，もう一つの面は理解させてくれないとアルバート・アインシュタインは言っていた．彼の意味する一つの側面とはどちらかわかるか．

Challenge 296 ny

場の方程式を楽しむためには何ができるか．正直言って，やってないことはもうほとんどない．完全な方程式を利用するための必要なプロセスはほとんどない．多くの相対論の教科書はそれらをちょっと記述したらそれで終わりである．しかし，それを調べるるのは意味がある．たとえば，シュワルツシルト解は唯一の球対称な解であることを示すことができる．同様に，1923年，ビルクホフ (Birkhoff) は，回転対称な真空解はどれも静的であることをしめした．たとえ，質量自身が動いていても，例えば，星が崩壊している間のようなときは，このような場合になる．

場の方程式の最も美しい応用は，相対論的プロセスからなる様々な動画である．これらは，世界中のウェブで提供されている．それらをみると，2個のブラックホールが衝突すると何が起きるか，観測者がブラックホール落ちると何が起きるかなどを見ることができる．これらの動画を作るには，場の方程式を近似せずに，直接，解くことが必要になる．*

もう一つの応用領域は，重力波に関するものだ．完全な場の方程式によれば，重力波は調和波ではなく，非線形である．サイン波は小振幅の近似でしか存在しない．さらに，興味深いのは，2つの波が衝突すると，多くの場合，特異点が，現れると予言されている．これは，依然，研究されている領域で，将来，一般相対論の量子化についての新しい見識が得られるかもしれない．

この節を，余白注記で終えよう．普通，場の方程式は，エネルギー-運動量は曲率を作り出すという一言で，理解される．ある曲率を作り出すにはエネルギー-運動量を計算する必要があるというふうに解釈されることもある．これを実際行ってみると，あらゆる曲がった時空が存在するのではないことがわかる．あるものは負のエネルギー，または，質量密度を生じてしまう．このような解は，物理系の長さ - 質量比に制限があることに矛盾するだろう．

* たとえば, www.photon.at/~werner/black-earth.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

ヒルベルトの作用 – 物体はどのように落下するか.

アインシュタインがデビッド・ヒルベルト (David Hilbert) と自分の仕事について議論した時, ヒルベルトはアインシュタインが数年かかったことを, 数週間で, やり方を見つけてしまった. ヒルベルトは, 真空空間での, 一般相対論は, 他の運動の例と同じように, 最小作用の原理を用いれば記述できることを見出した. すべての運動は作用を最小にする, つまり, すべての運動は変化を最小にするということは, ヒルベルトは知っていたのだ.

ヒルベルトは, 時空に対し, 変化を記述する量であるラグランジアンを見出すことからとりかかった. あきらかに, この量は観測者に対し不変でなければならない. 特に, あらゆる視点の変化に対し不変でなければならない.

重力による運動は曲率により決まる. 観測者に依存しない曲率はリッチスカラー R と宇宙定数 Λ の組み合わせでできないといけない. このようにして, 等価原理と一般共変性の条件がとりいれらる. 従って, 時空の変化は,

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int (R + 2\Lambda)\, \mathrm{d}V \,. \tag{221}$$

のような作用 S で記述できると考えられる. 体積要素 $\mathrm{d}V$ はこの計算式を適用するもの指定する必要がある. また, (ヒルベルトの仕事のあと数年後に追加された) 宇宙定数 Λ は, 微分同相写像不変なもっとも一般的な作用を数学的に記述するものとして入れられている. 以下で, 自然界のこの値は, 小さいけれども, ゼロではないだろうということを見よう.

長い計算を行い, ヒルベルトの作用はアインシュタインの場の方程式を導き, また, 逆に, アインシュタインの方程式からヒルベルトの作用が導けることが検証されている. つまり, 2つの式は全く等価である. 時空のかたまりのヒルベルト作用は, このかたまり上で, リッチスカラーと宇宙定数の2倍を積分したものである. 最小作用の原理とは, この積分ができるだけ最小になるように時空が動くことをあらわしたものである.

ヒルベルトの作用に加えて, 運動の完全記述には初期条件が必要である. これをするための研究分野がある. このトピックは私たちにはまだ早すぎる. Ref. 120

まとめると, 「事物はどう動くか. 」という質問は, 特殊相対論と同じように一般相対論で答えられる. つまり, 事物はもっともゆっくり年を取るような径路をたどる.

Challenge 297 ny ヒルベルトの作用は最大力から導けることを示せるか?

一般相対論の対称性

一般相対論の主要な対称性は, 微分同相写像不変性とか一般共変性とかよばれる. この対称性は, 運動が, 使用する座標系に依存しないということを言っている. もっと, 正確には, 物質の運動, 輻射, 時空は任意の微分可能座標変換のもとで不変であるということだ. 微分同相写像不変性はヒルベルト作用の本質的な対称性である.

空っぽの時空に対する場の方程式はスケール対称性も持っている. これは, すべての座標を共通の数値因子倍した時の, 方程式の不変性のことである. 1993年, Torreとアンダーソン (Anderson) は, 微分同相写像対称性と自明なスケール対称性が真空場の方程式の唯一の対称性であることを示した. Ref. 184

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

微分同相写像対称性とは別に，質量-エネルギーも含めた完全な一般相対論は，まだはっきりしていない対称性をほかにもっている．この対称性は，場の方程式の様々な起こり得る初期条件と絡んでいる．対称性は極めて複雑で，
Ref. 185 まだ，研究のトピックである．これらの興味深い研究が，ビッグバンの古典的記述に新しい見通しを与えるだろう．

一般相対論の質量

一般相対論の微分同相写像不変性は人生をおもしろくする．私たちは中空球
Page 271 の内側で生きていると言ってもいいことを後で見る．一般相対論では，エネルギーが実際どこにあるかは言うことはできないことを見てきた．もしエネルギーが存在していないとしたら，質量はどういうことになるのだろう．このことを調べてゆくと，遠くの時空が平坦な場合のみ，エネルギー同様，質量も局在化できる．この場合，直観的な考え方を精密化することで，局在化した質量値を定義することができる．つまり，未知の物体の質量は，探査機がその物体を回るのに要する時間から測定することができる．*

この直観的な質量の定義では，無限遠での時空の平坦性が要求される．
Challenge 298 ny 一言で言えば，全質量が定義できる場合にのみ，質量は局在化させることができる．そして，全質量は漸近的に平坦な時空においてのみ定義される．一般相対論において，正確な他の質量の概念はある点に集中した局所質量密度である．それに対し，点より大きく，時空全体よりは小さい領域に閉じ込められた質量の定義の方法はまだわかっていない(この場合，漸近的に平面にならない)．

力の極限と宇宙定数

宇宙定数を描像に含めようとすると，最大力の原理をよく考える必要がある．宇宙定数がゼロでない場合，定数 Λ が正の場合の時のみ，力の極限値が意味を持ってくる．現在測定されている値，$\Lambda \approx 10^{-52}/\mathrm{m}^2$ はこの場合に当たる．
Ref. 120, Ref. 121 実際，ブラックホールの半径質量関係式，

$$2GM = Rc^2\left(1 - \frac{\Lambda}{3}R^2\right) \tag{224}$$

は，正またはゼロの宇宙定数の時のみ，半径に依存しない最大力が有効であることを意味している．負の宇宙定数では，力の極限が意味を持つのは無限

Ref. 186 * この定義はArnowitt, DeserやMisnerにより定式化された，それ以来，*ADM* 質量としばしば呼ばれる．この考えは計量g_{ij}を用い，積分

$$m = \frac{c^2}{32\pi G}\int_{S_R}(g_{ij,i}\nu_j - g_{ii,j}\nu_j)\mathrm{d}A \tag{222}$$

を行う．ここで，S_R は半径 R の座標球で，ν はその球に垂直な単位ベクトル，$\mathrm{d}A$ はその球の面積要素である．もし，時空が漸近的に平坦で，質量分布が十分集中しているなら，大きな R に対し，極限
Ref. 187 が存在する．数理物理学者は，任意の多様体で，その計量が無限遠で，

$$g_{ij} = (1 + f/r + O(1/r^2))\delta_{ij} \tag{223}$$

のように変化するなら，全質量は $M = fc^2/G$ となることを示した．

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

に小さいブラックホールの時であろう．以降，現実的なアプローチを行い，最大力の制限値はゼロまたは正の値をとるとする．力の制限値として一定の値が示されているわけではない．これが満たされるには，第2の原理が必要になる．そのため，自然の最小力の原理を追加し，それを用いて，直接的な定式化をこれまで行ってきた．

Page 124

回転したり，荷電したブラックホールの場合，最大力の原理から一般相対論を導くという主張を変更する必要があるのだろうかと思う人がいるかもしれないが，Raychaudhuri方程式を用いた導出では変更されることはない．実際，議論の変更を伴うのはねじれに関するところで，これが，Raychaudhuri方程式を変える．ねじれが問題にならない限り，導出は正しい．ねじれの導入についてはこれからの研究課題である．

重力は相互作用か．

ガリレイ物理では，重力は物体の運動に影響を与えるものとされてきたが，そろそろ，この質問にはっきり答える時期に来ている．ガリレイ物理では，重力が運動を変化させるので，重力をポテンシャルとして記述した．実際，力，つまり，相互作用が物体の運動を変化させる．しかし，これまで，見たように，2個の物体は重力をとして互いに引き合い，両方とも自由落下し続ける．例えば，月は地球の周りを回っているが，これはその周辺を落下し続けているからである．自由落下する観測者は静止し続けるので，重力は物体の運動を変えるという言い方はすべての観測者にとって正しいとは言えない．実際，測地線は最大の直線径路であることを考えれば，すべての観測者にとって，月と地球は真直ぐな経路をたどっているともいえる．直線径路をたどる物体は相互作用の影響を受けていないと言えるのではないだろうか．

Vol. III, page ??

これを，別のやり方で考えてみよう．「相互作用」のもっとも基本的な定義は，'全体'と'部分の集合'との違いとしてとらえることができる．重力の場合，自由落下する観測者は，他の物体が存在しようがしまいが，何も特別なことはないと主張し，重力は相互作用ではないと主張するだろう．

しかし，相互作用は系と系の間でエネルギーのやり取りを行う．重力は，近似にすぎないが，エネルギーを移動すると言えることを見てきた．重力エネルギーの性質からするとこの言い方は正しい．エネルギーの観点からすると，重力は，近似的には，相互作用である．

Page 183
Challenge 299 s

これを数学的にみると以下のようになる．エネルギー-運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$ で，木星の周りを回っている衛星を考える．径路 s を動く間のエネルギー運動量変化を計算すると

Challenge 300 ny

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}s} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s} = m\left(\boldsymbol{e}_a\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^a}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_a}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{u}^a\right) = m\boldsymbol{e}_a\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}^a}{\mathrm{d}s} + \Gamma^a{}_{bd}\boldsymbol{u}^b\boldsymbol{u}^c\right) = 0 \qquad (225)$$

となる．ここで，$\boldsymbol{e}$ は座標軸の単位ベクトルである．任意の測地線に沿ったエネルギー運動量変化はゼロである．　従って，この運動においてエネルギー運動量は保存されている．言い換えると，この衛星には力が働いていない．式 (225) の第2項が真の重力であるという答えができるかもしれない．しかし，任意の世界線のどこでも，この項は消し去ることができる．　一言で言えば，数学でも，互いの周りを落下し続ける2個の物体間では何も変化し

Challenge 301 ny
Challenge ref. 189
Ref. 189

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

ないことが確認できる．つまり，重力は相互作用ではないといえるだろう．

光の振る舞いについてみてみよう．真空下では，光は自由運動をする．ある意味，輻射は自由落下であるということができる．奇妙なことだが，自由落下と静止は同じなので，輻射はいつも静止していると結論付けられるかもしれない．これは誤りではない！すでに，光は加速できないことを見た．* 重力による光の曲がりも，光は時空中で真直ぐな径路をたどるので，加速ではない．遠方の観測者にとって，光が質量近傍で減速したように見えても，その場所では光は光速で運動している．つまり，重力ですら光の運動を制御できない．

もし，知的な遊びとして考えるならなら，たとえ，重力が物体を軌道運動させ，光を曲げても，重力は相互作用ではないと言ってもいい．実際的な目的として考えるなら，重力は依然として相互作用である．

測地線の形の計算方法

一般相対論の半分は，物体は測地線に沿って落下することを意味している．すべての軌道は測地線，すなわち，固有時間が最長となる曲線である．この軌跡が計算できると非常に便利である．** まず，時空の形を知る必要がある．この「形」の概念は，なじみのある2次元的意味合いから拡張されたものである．表面に生きている生物にとって，それは，ふつう，計量 g_{ab} により表され，これにより，近傍点間の距離が定義される；

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_a \, \mathrm{d}x^a = g_{ab}(x) \, \mathrm{d}x^a \, \mathrm{d}x^b \,. \tag{226}$$

この式から，ふるまいの良い（アフィン）パラメータ s の関数としての曲線 $x^a(s)$ に対し，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{ad} \frac{\mathrm{d}x^d}{\mathrm{d}s} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}s} \,, \tag{227}$$

Challenge 303 ny

なら，$x^a(s)$ は時間的または空間的な（計量）測地線，つまり，2つの事象間の最大距離になる．*** ただし，$\mathrm{d}s$ は経路上でゼロではないとする．**** すべての物体はこの測地線に沿って落下する．前に，測地線の性質から，空へ投げ上げた石は脱出速度を超えた速度で投げない限り，その石は戻ってくることを示した．式 (227) は落下物体に対し成り立つ $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -\nabla\varphi$

Page 138

---

* 物質内で光が減速する屈折は反例にはならない．厳密に言えば，物質内の光は絶えず吸収され，放出されている．このプロセスの間は，やはり，真空内での光の速度と同じ速度で伝播している．巨視的極限で，全体として，減速しているように見えるだけである．同様のことが回折や反射対しても適用できる．光が曲がる現象の全リストはいろんなところで見ることができる．

Vol. III, page ??

** 好奇心ある人向けの短い節．初読者はとばしてもよい．

*** 普通の生活空間では，測地線と言うのは最短の距離であるが，一般相対論の時空では最長の径路になる．いずれの場合も，もっとも真直ぐな経路である．

**** この式は

$$\frac{\mathrm{d}^2x^a}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{228}$$

のように書かれることもよくある．ここで，条件

$$g_{ab} \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}s} = 1 \tag{229}$$

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

と，特殊相対論で自由に浮遊する物体に対し成り立つ $d^2x/dt^2 = 0$ の両方を置き換えたものである．

この径路は質量にも物質にも依存しない．従って，反物質も測地線上を落下する． Ref. 190 言い換えると，反物質と物質は反発せずに，お互い引き合う．おもしろいことに，通常物質を用いて行われた実験でも，注意深く行えば，このことを示せる． Challenge 304 ny どうすれば，いいかわかるか?

完璧を期して，光は光的またはヌル測地線を描く．言い換えると，測地線が

$$\frac{d^2x^a}{du^2} + \Gamma^a{}_{bc}\frac{dx^b}{du}\frac{dx^c}{du} = 0 \tag{231}$$

であるようなアフィンパラメータが存在する．ここでは条件は別の式

$$g_{ab}\frac{dx^a}{du}\frac{dx^b}{du} = 0\,. \tag{232}$$

になる．様々な型の測地線の定義に対し，page 134のFigure 64はどんな線か? Challenge 305 ny

リーマン体操*

多くの本では，歴史ののっとった，リーマン曲率テンソルを用いた難しい方法で，曲率を導入している．この節では，このような古いやり方に出くわしたときそれが理解できるよう簡単なまとめをする．

これまで，曲率はテンソルでうまく記述できることを見てきた．4次元では，とりわけ，普通 R と呼ばれるこの曲率テンソルという量を用いると，時空の任意の方向の2次元円板の面積を計算することができる．4次元では，円板の方向は2つの4元ベクトルで定義される． Challenge 306 e 今，これを $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とし，円板の代わりに，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ で張られる平行四辺形を考える．いくつかの定義が可能になる．

このとき，リーマン・クリストッフェル曲率テンソル R が定義され，この量を用いると，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ で張られる面積 A の面の曲率は，

$$K(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{R\,\boldsymbol{pqpq}}{A^2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})} = \frac{R_{abcd}p^aq^bp^cq^d}{(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta})p^\alpha q^\beta p^\gamma q^\delta} \tag{233}$$

で計算できる．ここで，英字 a, b, c, d 等は0から3の数字をとり，ギリシア文字についてもおなじである．また，同じ添え字が2度現れているときは和を意味する．明らかに，R は4階テンソルである．このテンソルは時空の内部曲率を表しているに過ぎない．それに対し，計量 g は曲率だ

が満足されないといけない．これは，単に，すべての接ベクトルは単位ベクトルで，経路上で $ds \neq 0$ を要求しているにすぎない．上式で現れる記号 Γ は

$$\Gamma^a{}_{bc} = \left\{ {a \atop bc} \right\} = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc})\,, \tag{230}$$

をあらわし，第2種クリストッフェル記号 または単に計量接続と呼ばれている．

* 好奇心ある人向けの短い節．初読者はとばしてもよい

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

けではなく，表面の完全な形を記述している．従って，曲率は局所的に関連している物理量であり，したがって，物理上の記述では*Riemann* * テンソルRまたはそれから導かれる量を使用する．**

しかし，今述べた曲率の定義は忘れてしまってもかまわない．もっと，物理的な見方でリーマンテンソルを見るもう一つの方法がある．曲率は重力を意味することを知っている．先に，述べたように，重力があると，近接した2個の粒子が，自由に，同じ速度で，同じ方向に動いていると，2粒子間の距離は変化する．つまり，重力の局所効果は近接粒子の相対加速度である．

Challenge 307 e

テンソルRはこの相対加速度を正確に記述していることがわかる．つまり，以前に，潮汐効果と呼んだものである．明らかに，相対加速度 $\boldsymbol{b}$ は，2粒子間距離 $\boldsymbol{d}$ と2粒子の速度 $\boldsymbol{u}$ の二乗 (なぜか?) で増加してゆく．従って，R をこれらの量の (一般化された) 比例因子として定義できる；

Challenge 308 ny

$$\boldsymbol{b} = R\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{d} \quad \text{or,} \quad \text{more} \quad \text{clearly,} \quad b^a = R^a{}_{bcd}\, u^b\, u^c\, d^d \,. \tag{236}$$

リーマン曲率テンソルの成分は長さの逆の二乗の次元を持っている．そして，内部曲率に関する情報をすべて含んでいるので，もし R がある領域でゼロになるなら，その領域で時空は平坦である．この関係は，第2の定理から簡単に導ける．***

Challenge 309 ny

テンソル R を定義する最後の方法は次のとおりである．自由落下する観測者に対しては，計量 g_{ab} は，特殊相対論より計量 η_{ab} で与えられ

---

* ベルンハルト・リーマン (Bernhard Riemann) (b. 1826 ブレゼレンツ, d. 1866 Selasca), 著名な数学者. 多くの重要な業績の1つが非ユークリッド幾何学の基礎を作ったことである.

** 時計の時間の刻み具合, ものさしの長さ, 光の伝播の変化を知ることで時空を曲げられることを前に示した. このような実験をすれば, 簡単に, 計量 g を決定できる. 各時空点で局所的にミンコフスキー計量になるような計量 g_{ab} をもつ4次元多様体 M で, 時空は記述される. このような多様体をリーマン多様体とよぶ. このような計量だけが, 局所慣性系, つまり, すべての時空点での局所ミンコフスキー時空を定義することができる. 特に,

$$g_{ab} = 1/g^{ab} \quad \text{and} \quad g_a{}^b = g^a{}_b = \delta^a_b \,. \tag{234}$$

となる. 曲率と計量はどのように関係しているのだろうか. この問いに対する答えだけで相対論の本はたくさんのページを費やしている. ここでは, 情報をだけにとどめ, その関係は

$$R^a{}_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a{}_{bd}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^a{}_{bc}}{\partial x^d} + \Gamma^a{}_{ec}\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{fd}\Gamma^f{}_{bc} \,. \tag{235}$$

となる. 曲率テンソルは計量の2階微分から作られている. 一方, 曲率がわかれば, 計量を決めることができる. 近似関係式はあとで述べる.

*** この第2の定理は測地偏差による定義ともいわれている. もちろん, これは, 第1の定理と一致するという証拠ではない. はっきりとした証明は文献をみてください. テンソル R を思い浮かべる第3の方法がある. これは, より数学的な方法で, リーマンが用いた本来の方法である. 1つのベクトル $\boldsymbol{w}$ を, それぞれの長さが ε に2つのベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ から作られる平行四辺形の周りを平行に移動させると, ベクトル $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{w} + \delta\boldsymbol{w}$ に変わったとする. この時,

Ref. 191

$$\delta\boldsymbol{w} = -\varepsilon^2 R\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w} + \quad \text{higher-order terms} \quad . \tag{237}$$

となる. 以前に登場した有名な南向きの馬車を調べることで, 測地線偏差についてもっと多くのことが学べる. コンパスが発明される前に中国で使われていたこの装置は, 世界は平坦でありさえすれば, うまく動く. 実際のところ, 曲がった平面上では, 大きな閉曲線に沿って動くと, 出発時とは違った方向を指すことになる. なぜか説明できるか.

Vol. I, page ??

Challenge 310 s

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

る. その近くでは,

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \frac{1}{3} R_{acbd} x^c x^d + O(x^3)$$
$$= \frac{1}{2} (\partial_c \partial_d g_{ab}) x^c x^d + O(x^3) \,. \tag{238}$$

となる. 曲率の項が, 平坦な時空の計量からのずれを表している. 曲率テンソル R は巨大な化け物で, 時空の各点で $4^4 = 256$ もの成分を持つ. しかし, 対称性から, 独立な成分は20個まで減らせる. * 物理的に重要な実際の数となると, もっと少なく, 10しかない. これらは, リッチテンソルの成分で, リーマンテンソルを縮約, つまり,

$$R_{bc} = R^a{}_{bac} \,. \tag{241}$$

とおくことで, 定義できる. その成分は, リーマンテンソルの成分のように長さの逆二乗になる. テンソル R_{bc} の値, つまりは, R^a_{bcd} の値は, R_{abcd} と異なり, ミンコフスキー計量の符号付け方には依存しない.

Challenge 312 e

シュワルツシルト解に対しては $R_{abcd}R^{abcd} = 48m^2/r^6$ となることを示せるか.

Challenge 313 ny

一般相対論についての楽しみとおもしろい問題

現在, 70もの人工天体が太陽から遠ざかっているが, 人々はなぜパイオニア10号と11号が, 土星の軌道を通過したことで, (太陽に向かって) 一定の減速$8 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$を受けているか考えている. この効果はパイオニア異常と呼ばれている. 現在の所, 原因ははっきりしておらず, 研究がつづけられている. しかし, これは, 時々指摘されるような重力の逆二乗則からのずれによるものではなく, 電磁気学的なものであるという研究結果もある.

Ref. 192

衛星からの熱放出の非対称性を指摘する声もある. 搭載されている発電機は2.5 kWの熱を発生し, それが衛星から放出されている. この測定されている異常は前後で80 Wの非対称性があれば十分説明できる. 最近の研究によれば, この程度の非対称性は実際存在しており, 問題は解決したといわれている.

Ref. 193

* *

地平線にあらわれる最大仕事率や最大力は一般相対論の基礎である. それでは, 時空の他で, このような説明ができる物理系はあるのだろうか?

---

* 自由落下の定義から, ある添え字ではリーマンテンソルは対称になり, 別の添え字では反対称になる.

Challenge 311 ny

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad , \quad R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} \,. \tag{239}$$

これらの性質から多くの成分がゼロになる. また, 関係式

$$R_{abcd} + R_{adbc} + R_{acdb} = 0 \,. \tag{240}$$

も重要である. この添え字の順序は文献間で統一されていないので気を付ける必要がある. Rから構築される不変量のリストはとても長い. $\frac{1}{2}\varepsilon^{abcd} R_{cd}{}^{ef} R_{abef}$, つまり, リーマンテンソルとそとの双対の積 ${}^*R\,R$ はThirring–Lense効果の不変的性質を示している.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Page 32 特殊相対論における主要な効果，すなわち，速度の極限，ローレンツ収縮やエネルギー質量の等価性が，固体の中の転移で見つかっていることを述べた．一般相対論で同様の系は存在するのだろうか．これまで，このような系を見つける努力がされてきた結果，完全ではないが，一部，うまくいっている．

一般相対論が時空のマットレスの変形を記述できることから，この方程式や考え方応用が固体の変形にも応用されている．Krönerがこの類似性を詳細にしらべた．

Ref. 111

「地平線」を持つ他の物理系，つまり，曲率に類似した観測可能対象をもつ物理系が液体の中——ここでは，渦がブラックホールの役目を果たしている——や光の伝播に対し量子流体に見つかっている．このような物理系の研究はそれ自体が独立の研究対象になっている．

Ref. 194

巨視的な系の中に，一般相対論と完全に類似するものがほんの数年前に発見された．この発見については，私たちの冒険の一番最後で部分で述べる．

Vol. VI, page ??

* *

最大力の原理は，一般相対論と競合する理論を排除するのに使えるのだろうか．一般相対論に対する競合理論としてよく登場するのは，BransとDickeにより提唱された重力のスカラーテンソル理論とその一般化されたものである．

Page 106 もし，ある種のスカラーテンソル理論が一般的な地平線方程式に従うものであれば (110)，最大力を含んでいるに違いない．一般的な地平線方程式は静的および動的地平線の両方に対しなりたたなければならない．もし，そういうことになると，この種のスカラーテンソル理論は一般相対論と等価なものになってしまうであろう．なぜなら，Jacobsonによれば，普通の場の方程式が導出できると考えられるからである．もし，スカラー場が物質のようにふるまうなら，つまり，物質のように質量エネルギーをもち，時空を曲げるなら，こいうことが起きるであろう．他方，この種のスカラーテンソル理論で，一般地平線方程式が，一般的なすべての運動する地平線に対し成り立たなければ，スカラーテンソル理論は一般相対論よりも多くの定義定数を持ち，最大力はあらわれず，一般相対論とは等価ではなくなる．この関係は，静的地平線の地平線方程式の実験的テストが一般相対論の検証に十分なものでないことを示している．つまり，このようなテストは，すべてのものではないが，いくつかのスカラーテンソル理論を除外する．

* *

一般相対論を検証する1つの方法は，太陽系に3機の探査機を打ち上げ，高精度でそれらの相対位置を測定することだろう．一番良いのは，周波数を安定化させたレーザーをある探索機から残りの２機の探査機に向かって送ることである．このプロジェクトの主なテクニカルなリスクをまとめられるか．また，それを減らす方法を見つけられるか?

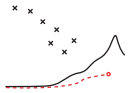
Challenge 314 s

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

場の方程式のまとめ

一般相対論の方程式は以下ののことを主張している．(1)空間の局所的な曲率は局所エネルギー密度を最大力で割ったもので与えられる．(2)物体は局所曲率により定義される測地線上を運動する．

これらの記述は，これまで行われたすべての実験で確認されている．



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Chapter 8

なぜ, 星は見えるのか. – 宇宙内の運動

> Zwei Dinge erfüllen das Gemüt mit immer neuer und zunehmender Bewunderung und Ehrfurcht, je öfter und anhaltender sich das Nachdenken damit beschäftigt: der bestirnte Himmel über mir und das moralische Gesetz in mir.*
>
> イマニュエル・カント (Immanuel Kant)

澄みきった夜labelwhyseestars, 2,000から5,000個の星を肉眼で見ることができる. そのうちの数100個には名前がある. なぜか? 世界中のあらゆる所で, その星や星座に関連した神話が作られているからだ. 神話は, 理解できないものを, もっと, 理解できるようにするために作り出された話である. しかし, 星を見ることができるという単純な事実にこそ, 神話よりももっと素晴らしい話の基本がある. それは現代物理のほとんどすべてに関連した宇宙の全歴史の基礎である.

Ref. 196

どの星を私たちは見ているのか

> [天の川について,]デモクリトスは, 寄り添うような多数の小さな星からの発せられた光の領域で, その星の群れが全体としての明るさを創り出していると言っている.
>
> アエティウス, *Opinions*.

Ref. 198

澄んだ夜空に見えている星は, 主に, 銀河系の周辺領域の近隣にある最も明るい恒星だ. それらは, 私たちから4から数1000光年の間にある. 大雑把にいって, 私たちの近くでは, 約400立方光年に1個の恒星がある. 私たちの太陽は銀河系の1000億の恒星の1つにすぎない.

夜に裸眼で見ることのできるほとんどすべて星は私たちの銀河系からのものだ. 北半球において, 裸眼でたえず見えている銀河系外の天体というと, Figure 87に示す, いわゆる, アンドロメダ星雲である. これは, 1755年にイマニュエル・カント (Immanuel Kant) が推測したように, 私たちの銀河系のような1つの銀河である. 南半球ではいくつかの銀河系外天体を裸眼で見ることができる. さそり星雲や大小のマゼラン星雲がそうである. マゼ

---

* 'これまでにない賛美と畏怖の念が膨らみとともに, 2つのことが気持ちを満たし, だんだんとそのことを考えることが増えてゆきいつも考えている. 頭上の星があふれた空と私の中のモラルの規範.' イマニュエル・カント (Immanuel Kant) (1724–1804)は著名な啓蒙哲学者で, その運動は, 宗教を基盤とした治政により広がった誤った思想をしりぞけ, 近代科学と財産と生活についての西洋基準に導いた.

Ref. 195

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

FIGURE 83 現代の技術で撮影された私たちが見ることのできる夜空の写真. 数千の星と銀河系が写っている. 写真像は地球の多くの場所で, 雲の無い夜に撮影された空をデジタル合成したもの. 銀河系は水平方向に広がっている. (© Axel Mellingerから Ref. 197)

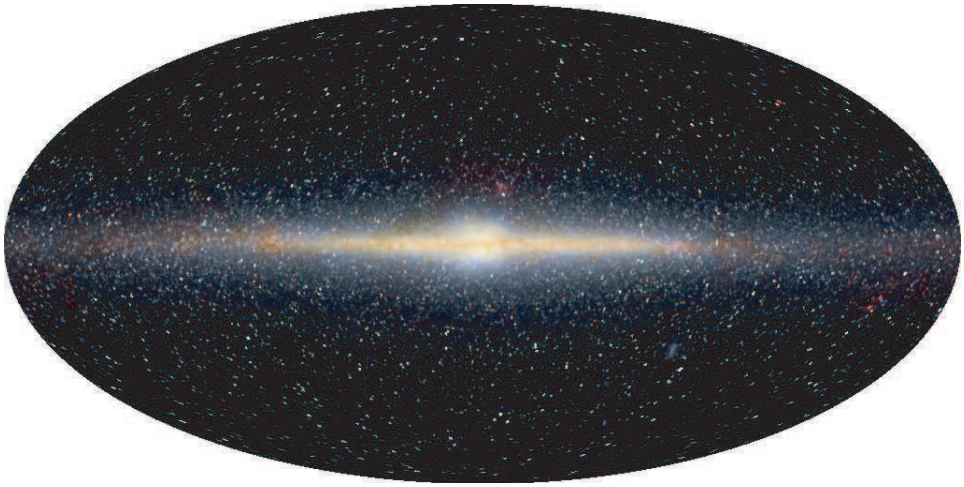


FIGURE 84 近赤外で見た夜空と銀河 系. . 色付けされている. (courtesy NASA)

ラン星雲は私たちの銀河に隣接する銀河である. 他に, 一時的に, まれに見られる系外天体が新星で, これは, 近くの銀河でおきた恒星の爆発である. もっとまれに見られるのが超新星でこれは遠くの銀河で起きることもある.

実は, 目に見える恒星は, 別の観点でも特殊である. 例えば, 恒星の約半分は, 望遠鏡でみると2倍に増える. つまり, シリウスように, 2つの恒星が互いの周りを回っているのだ. 互いの軌道を測定すると, それらの質量を決定できる. どのように行うか説明できるか?

Challenge 315 ny

Vol. III, page ??

望遠鏡を用いるともっと多くの銀河系外天体を見ることができる. 現在, 望遠鏡, 特に, 技術的に可能な最大の望遠鏡を建設する理由がこれである.

宇宙は, 私たちの銀河系である天の川とは別の物なのか. その通りである. これを示すための多くの説明がある. まず, 私たちの銀河系は回転しているため, 平ったい. もし, 銀河が回転しているとしたら, この回転の背景となる他の質量が存在しているはずである. 20世紀に入ってからの発見だ

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

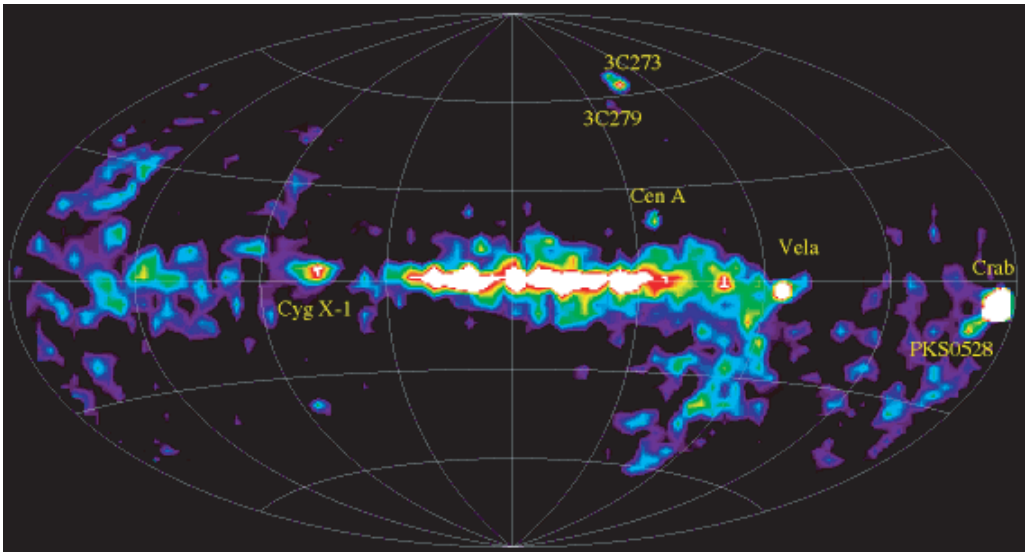


FIGURE 85 夜空にある1から30 MeVのエネルギーをもつX線源像. 色付けされている. (NASAの好意による)

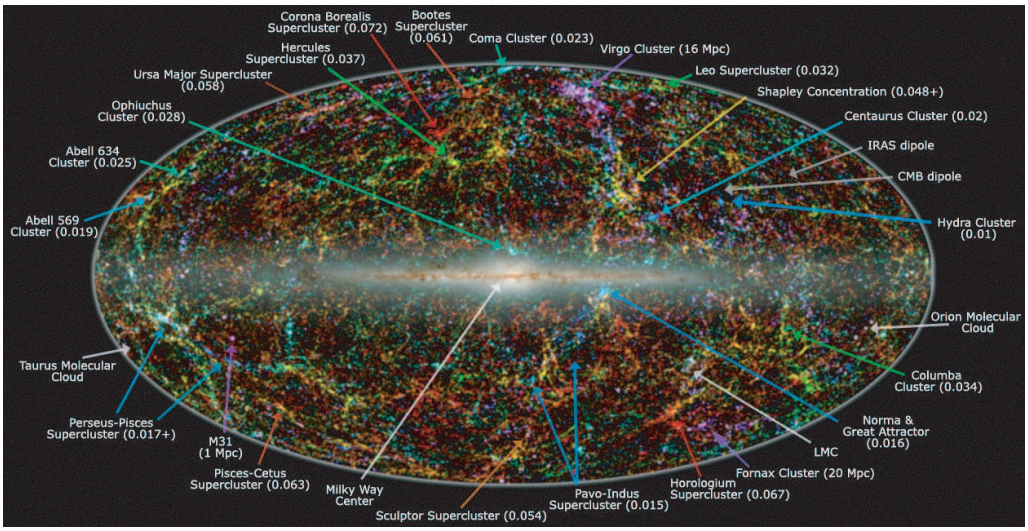


FIGURE 86 赤外線で作られた像. 色付けされている. 私たちの周りの宇宙には大きな構造があることを示している. 各銀河の色は色を, 括弧の数字は赤方偏移の量を表している. それに銀河系の赤外像を重ねている. (Thomas Jarret/IPAC/Caltech)

けも, 宇宙には, 他に, 膨大な数 –約10^{11} –の銀河が存在している. その例をFigure 87, Figure 88およびFigure 89に示す. 最後の図は銀河がどのように, 「死」を迎えるかを表しており, 別の銀河と衝突している.

宇宙における私たちの銀河系の位置づけを理解するのがこれほど遅れた理由はなぜだろう. それは, 地球の形を決定しようとした時に直面したのと同じような困難があったのだ. 銀河というのは, 澄んだ夜に見える天の川の帯ではなく, お互い重力で引き合う約 10^{11} 個の恒星から成る物理系であることを理解しないといけなかったのだ. * 地球のように, 天の川も3次元的

* 「ミルクの道」をあらわすギリシア語の*galaxy*は, ギリシアの神ゼウスが, 息子のヘラクレスを

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

FIGURE 87 私たちの隣の銀河の1つ, アンドロメダ星雲 M31 (メシエカタログ天体カタログの31番目のメンバー) (NASA)

FIGURE 88 楕円銀河 NGC 205 (NGCカタログ205番目のメンバー) (NASA)

形状を持つものだとわかってきた. Figure 84の赤外写真が示すように, 私たちの銀河も, 平板な円形をしていて, 中央に球状のふくらみを持っている. 直径は 100 000 光年である. 2から2.5億年かけて1回転する. (これをどうやって測定するかわかるか?) 回転はかなり遅い. 太陽が形成されてから, 銀河系の中心の周りを太陽はまだ25回転しかしていない.

Challenge 316 ny

私たちの銀河系の質量を測定することもできる. その秘訣は縁辺にある2重パルサーを使うことだ. 何年かにわたって観測していると, パルサーの動きは地球上で測定できる周波数のシフトに影響を及ぼすので, パルサー

不死にするため, ヘラの乳を吸わせようとしたとき, 将来の力を暗示するかのように, 若いヘラクレスはあまりに強く吸いすぎたため, ミルクが空中に散らばった.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

FIGURE 89 衝突する銀河M51とM51Bは銀河がどのように「死ぬ」かを示す. 直径 65 000, 31 Mal離れている. (NASA)

FIGURE 90 宇宙は銀河で満ちている – この写真はペルセウス銀河団を示す. (NASA)

の銀河系の周りでの加速度を導出できる. 何十年にわたる観測が必要で, 多くの偽の効果を除去する必要がある. ともかく, このような観測は進行中である. 現時点での銀河系の質量は10^{42} kg, または $5 \cdot 10^{11}$ 太陽質量と見積もられている.

Ref. 199

どうやって星をみるか

夜空の最高の写真像は最高感度の望遠鏡で作られる. 地上にあるもっとも高感度な望遠鏡は, Figure 92に示すチリ, パラナルにある世界最大の望遠鏡で

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

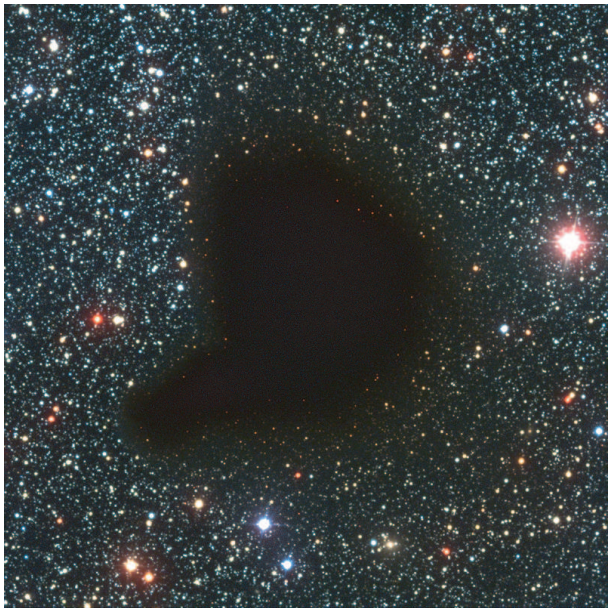


FIGURE 91 宇宙は多くの星雲を含んでいる. へびつかい座のこの分子雲が一例である. (© ESO)

Ref. 200 ある. 望遠鏡の歴史とその能力についての話はおもしろい. 大気により多くの波長が吸収されるため, 最高感度の望遠鏡は, Figure 93のように衛星に搭載されている. このような近代的なシステムで, 夜空の各波長領域のすばらしい画像が得られている. Figure 83からFigure 86はその例である. 異なった波長で夜空がどう見えるかを掲載した美しいウェブサイトwww.chromoscope.netがある. カーソルを動かすだけで, ある波長から別の波長へとスライドさせることができる. それをながめ, 宇宙の美しさを楽しむのは価値があることだ.

夜に何を見るか

天体物理から得られる物質についての結論は, 私たちが古典物理で親しんでいるものとは違う奇妙なものである：空で観測される物体は雲として現れる. 雲とは物質密度が中心からの距離とともに小さくなってゆくもので, はっきり
Page 201 とした境界もなく, サイズもはっきりしない. Figure 91に示す天体は分子雲である. しかし, これが唯一の例ではない. 惑星や恒星も含め, ほとんどの天体は雲である.

大気やちりのリングも地球の一部であると考えれば, 地球も雲である. 太陽も一つの雲である. 太陽はガス球から始まり, 外縁の盛りあがり構造, 太陽圏, 発生する太陽風や磁気圏まで考えると太陽は地球以上に雲である. 太陽系についても, 彗星雲, 隕石帯や星間ガスを考えれば雲である. 銀河系も, 物質分布や系をとりまく輻射雲を思い出すと雲である. 実のところ, ヒトですら雲と見ることもできる. どんなヒトもガス, 皮膚からの小さなほこり粒子や水蒸気などに囲まれている.

Ref. 201 宇宙では, ほとんどすべての雲はプラズマ雲である. . プラズマとは, 火, いなずま, ネオン管の内部や太陽のようなイオン化された気体である.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

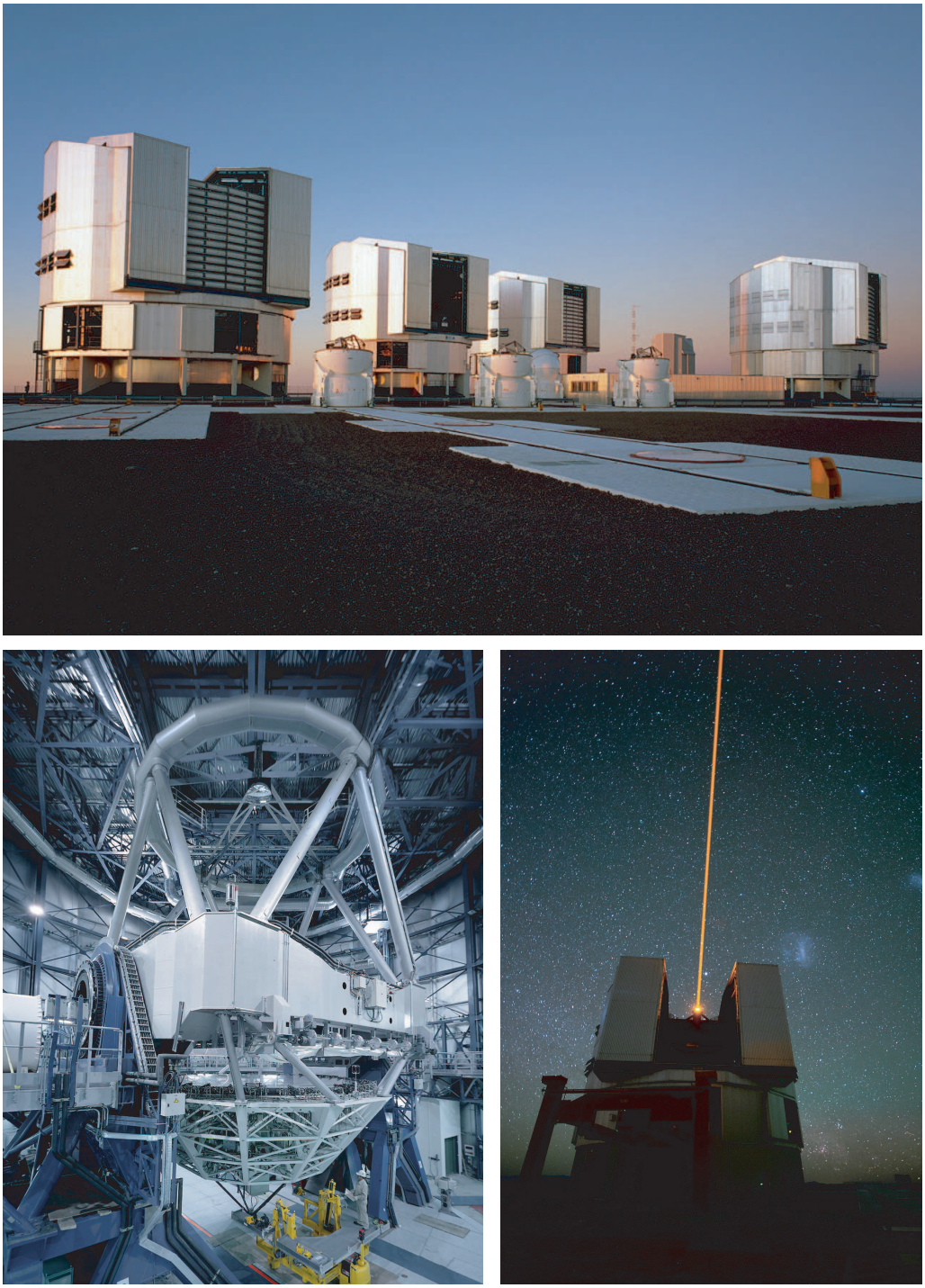
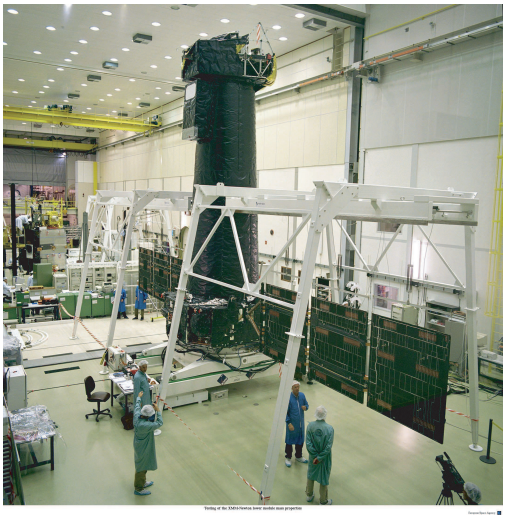
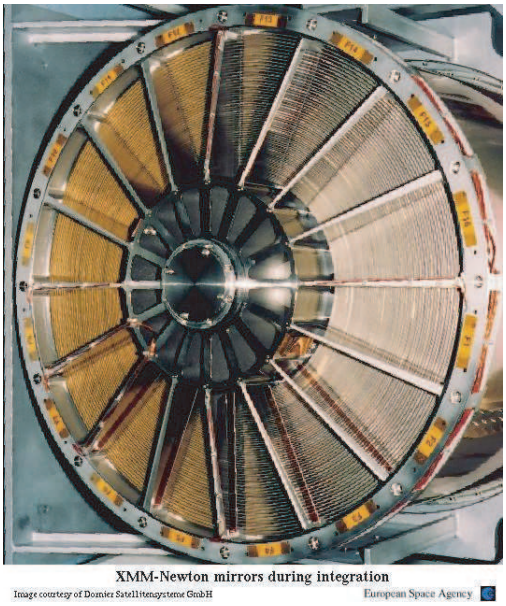


FIGURE 92 チリのパラナルににあるEuropean Southern Observatory (ESO) にある4基のVery Large Telescopes (VLT) の1基. 世界でもっとも強力な望遠鏡, 直径は8 m (© ESO)





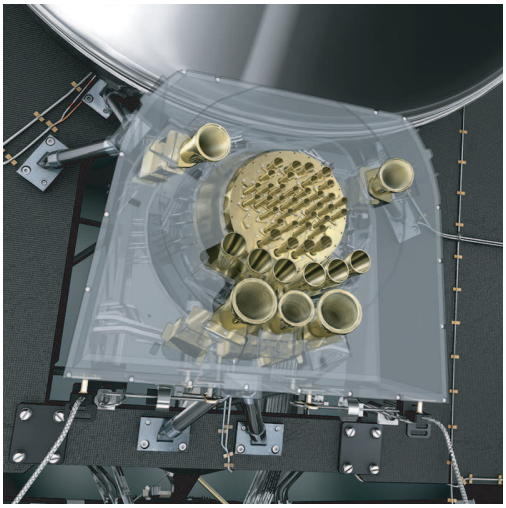


FIGURE 93 上: XMM-Newton衛星とそのたまねぎ状の高精度な鏡群. 夜空のX線地図を創り出す. 下: Planck衛星と宇宙背景輻射の高精度地図作成のための金の板状マイクロ波アンテナ. (© ESA)

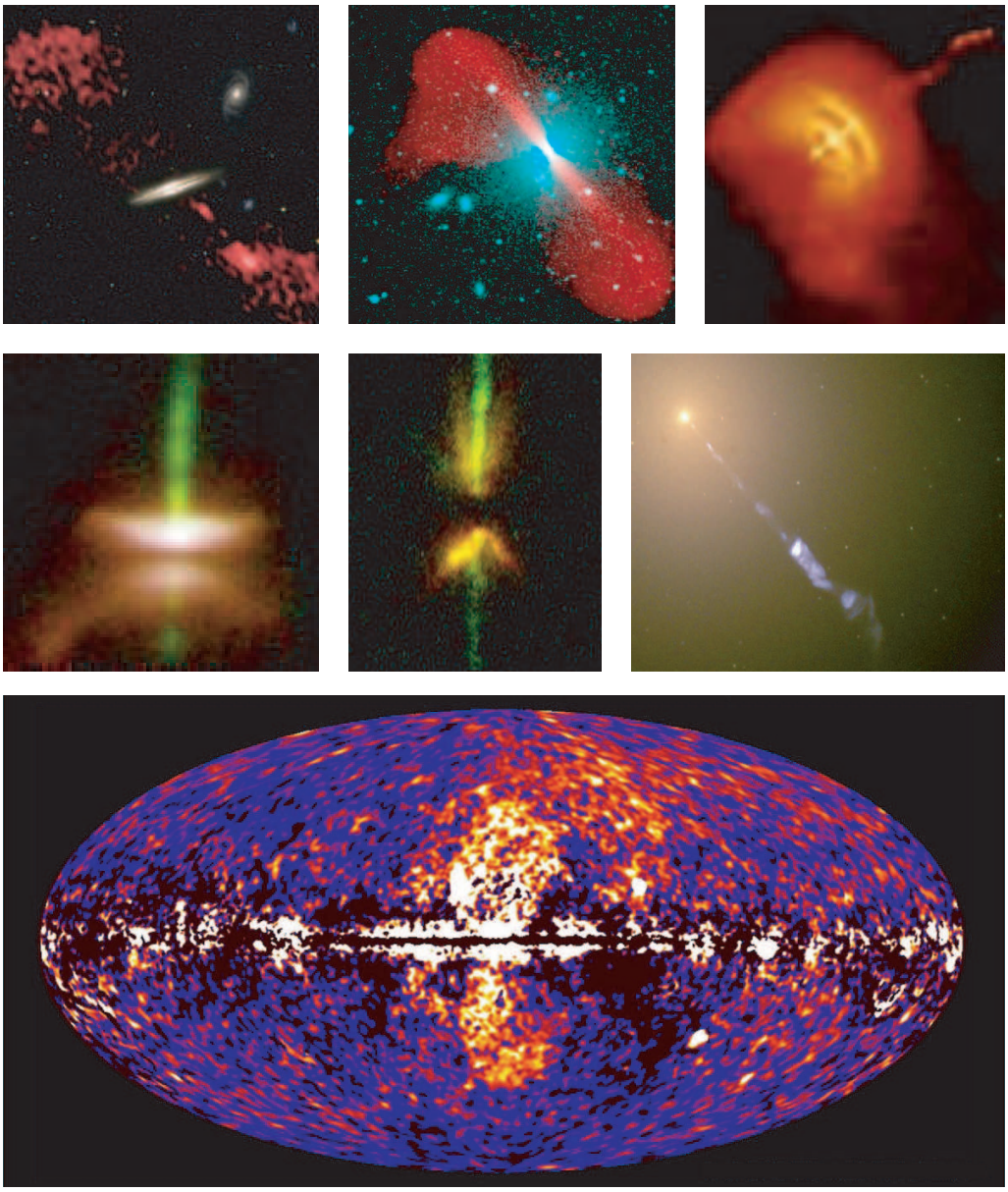


FIGURE 94 軸に沿ってジェットを放出する回転雲; 上段:銀河0313-192, 銀河3C296, およびVelaパルサーの合成画像 (可視光と赤外) ;中段: 星の形成HH30, 星の形成DG Tauri B, およびM87からのブラックホールジェット;下段: 私たち自身の銀河系からのジェットの発見 (いずれも NASA)

宇宙のすべての物質の少なくとも99.9 %はプラズマ雲の形をしている. トースターや爪楊枝やそれを使う人のような固体や液体の形のものの割合は非常に小さい.

宇宙の雲は多くの共通の性質を持っている. まず, 宇宙のすべての雲は, 近くの粒子と衝突したり, 他の相互作用の影響をうけない限り, 回転している. 従って, 大部分の雲は平たい. つまり, 円盤状である. 次に, 回転している雲の中で, 物質は中心に向かって落ちてゆく. つまり, 大部分の雲は降着円盤である. 最後に, 外乱をうけない降着円盤は回転軸に沿って何か

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

を噴き出す．つまり，ジェットを持つことになる．この基本構造は若い恒星，パルサー，銀河，クエーサーやその他の系で見られる．Figure 94にいくつかの例を示す．2010年，私たち自身の銀河，銀河系でもジェットが見つかった．(太陽もジェットをもっているか．これまで，だれも検出していない.)

Challenge 317 r

まとめると，夜間，私たちが見ているのは，大部分が，回転している平たい雲で，その軸に沿ってジェットを放出している．また，夜空では，他に多くの現象が起きている．天文学や天体物理学は主にこれらについての情報を集めている．観測につての概要をTable 5に示す.

Ref. 202

TABLE 5 宇宙についての観測.

要素	主要な性質	値
現象		
銀河の形成	ハッブルでの観測	数回
	トリガ事象	未知
銀河の衝突	運動量	10^{45} から 10^{47} kg m/s
恒星の形成	雲の崩壊	0.04から130太陽質量の恒星の形成
	頻度	銀河あたり0から1000太陽質量/年；銀河系あたり約1太陽質量/年
	恒星の融合	最大250太陽質量
新星	新星の明るさ	$L < 10^{31}$ W
	放出バブル	$R \approx t \cdot c/100$
超新星	新星の明るさ	$L < 10^{36}$ W
	割合	銀河当たり1から5回1000 a
極超新星	光バースト	$L > 10^{37}$ W
ガンマ線バースト	光度	最大 L は 10^{45} W, 全宇宙の可視光高度の約1 %
	エネルギー	*c.* 10^{46} J
	継続時間	*c.* 0.015 から 1000 s
	観測数	*c.* 2 /日
電波源	電波の放出	10^{33} から 10^{38} W
X線源	X線の放出	10^{23} から 10^{34} W
宇宙線	エネルギー	1 eV から 10^{22} eV
重力レンズ	光の曲がり	角度で 10^{-4}″ まで
彗星	回帰, 蒸発	典型的な周期 50 a, 典型的な可視期間 2 ka, 典型的な寿命 100 ka
隕石	年齢	最大$4.57 \cdot 10^9$ a
成分		
銀河系内空間	質量密度	*c.* 10^{-26} kg/m^3
クエーサー	赤方偏移	最大$z = 6$
	光度	$L = 10^{40}$ W, 1つの銀河と同程度
超銀河団	銀河の数	私たちの地平線内で*c.* 10^8
我々の属する超銀河団	銀河の数	約 4000
銀河群	サイズ	100 Zm

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

TABLE 5 (続き) 宇宙についての観測.

要素	主要な性質	値
	銀河の数	10から1000の間
我々の属する銀河群	銀河の数	30
銀河	サイズ	0.5 to 2 Zm
	数	地平線内で $c.\,10^{11}$
	内容	球状星団 10 から 400
	内容	典型的な恒星数はそれぞれ 10^{11}
	内容	典型的に, 超大質量ブラックホール1個, 中間質量ブラックホール数個
銀河系, 我々の銀河	直径	1.0(0.1) Zm
	質量	10^{42} kg または, $5 \cdot 10^{11}$ 太陽質量 Ref. 199
	速度	ウミヘビ座ケンタウルス超銀河団の方へcsd600km/s
	内容	約30 000個のパルサー Ref. 203
	内容	100万個の恒星からなる100個の球状星団 g
球状星団 (例 M15)	内容	数千個の恒星, 1個程度の中間質量ブラックホール
	年齢	最大12 Ga (既知のもので最も古いもの)
星雲, 雲	成分	ダスト, 酸素, 水素
我々の星間雲	サイズ	20光年
	成分	7500 Kの水素原子
恒星システム	タイプ	2重星の軌道運動, 70以上の恒星は褐色矮星を伴う , 数個の惑星系
太陽系	サイズ	2光年 (オールト雲)
	速度	みずがめ座からしし座の方へ368 km/s
恒星	質量	最大130太陽質量 (恒星の融合は除く) Ref. 204
巨星および超巨星	大サイズ	最大1 Tm
主系列星		
褐色矮星	小質量	0.072太陽質量以下
	低温	2800 K以下 Ref. 205
L矮星	低温	1200 から 2800 K
T矮星	低温	900 から 1100 K
白色矮星	小半径	$r \approx 5000$ km
	高温	100 000 から 5000 K
中性子性	原子核質量密度	$\rho \approx 10^{17}$ kg/m^3
	小サイズ	$r \approx 10$ km
X線バーストの放出源	X線放出	
パルサー	周期的な電波放出	
	質量	最大約 25 太陽質量

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

TABLE 5 (続き) 宇宙についての観測.

要素	主要な性質	値
帯磁星	高磁場	最大10^{11} Tかそれ以上 Ref. 206
	ガンマ線リピータ, または, X線パルサー	
	質量	25太陽質量以上 Ref. 207
ブラックホール	地平線半径	$r = 2GM/c^2$, 観測された質量は3太陽質量から 10^{11} 太陽質量
一般的性質		
宇宙の地平線	距離	$c.\ 10^{26}$ m = 100 Ym
膨張	ハッブル定数	$71(4)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ または $2.3(2)\cdot 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}}$
宇宙の'年齢'		13.8(1) Ga
真空	エネルギー密度	$k = 0$ に対して $0.5\,\mathrm{nJ/m^3}$ または $\Omega_\Lambda = 0.73$
		時間依存性は証拠がない
大規模形状	宇宙の曲率	$k \approx \Omega_K = 0$ Page 220
	トポロジー	測定された規模では単純
次元	数	測定されたエネルギーと規模では, 空間は3, 時間は1
物質	密度	2 から $11\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/m^3}$ または1立方メートルあたり水素原子 1 から 6個
		$\Omega_M = 0.25$
バリオン	密度	$\Omega_b = 0.04$, Ω_M の1/6(Ω_M に含まれる)
ダークマター	密度	$\Omega_{DM} = 0.21$ (Ω_M に含まれる), 未知
ダークエネルギー	密度	$\Omega_{DM} = 0.75$, 未知
光子	数密度	4 から $5\cdot 10^8\,/\mathrm{m^3}$ $= 1.7$ to $2.1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg/m^3}$
	エネルギー密度	$\Omega_R = 4.6\cdot 10^{-5}$
ニュートリノ	エネルギー密度	Ω_ν 未知
平均温度	光子	2.725(2) K
	ニュートリノ	未測定, 予測値は 2 K
摂動	光子の非等方性	$\Delta T/T = 1\cdot 10^{-5}$
	密度の振幅	$A = 0.8(1)$
	スペクトル指数	$n = 0.97(3)$
	テンソル・スカラー比	95 % の信頼度で$r < 0.53$
イオン化光学的深さ		$\tau = 0.15(7)$
デカップリング		$z = 1100$

しかし, 空に見えるものを語ると同時に, 一般的な事柄を明らかにしないといけない.

FIGURE 95 天体の美：白鳥座のバブル2008年に発見された. 中央の星から反発を受けた星雲 (色付けされている. T.A.Rector, H. Schweikerの好意による)

宇宙とは何か

> “チャイナタウンでさえ道を見つけるのが大変な時に, 宇宙を知りたいと思っている人にはびっくりだ.”
>
> ウッディ・アレン (Woody Allen) Allen, Woody

英語の宇宙と言う言葉‘universe’の語源には「回転すること」と言う意味が含まれている. 宇宙は, 夜, 私たちの周囲を回転しているものである. 物理学者にとって, ‘universe’は, 少なくとも, 3つの意味がある.

– (観測可能なまたは見える) 宇宙とは, 観 測できる質量およびエネルギーの全体をいう. これには宇宙の地平線の内部にあるすべてが含まれる. 地平線は私たちから遠ざかっているので, 観測可能な質量やエネルギーは常に増えている. ’’観測可能な宇宙’’ とは, 従って, 時間的に固定さ

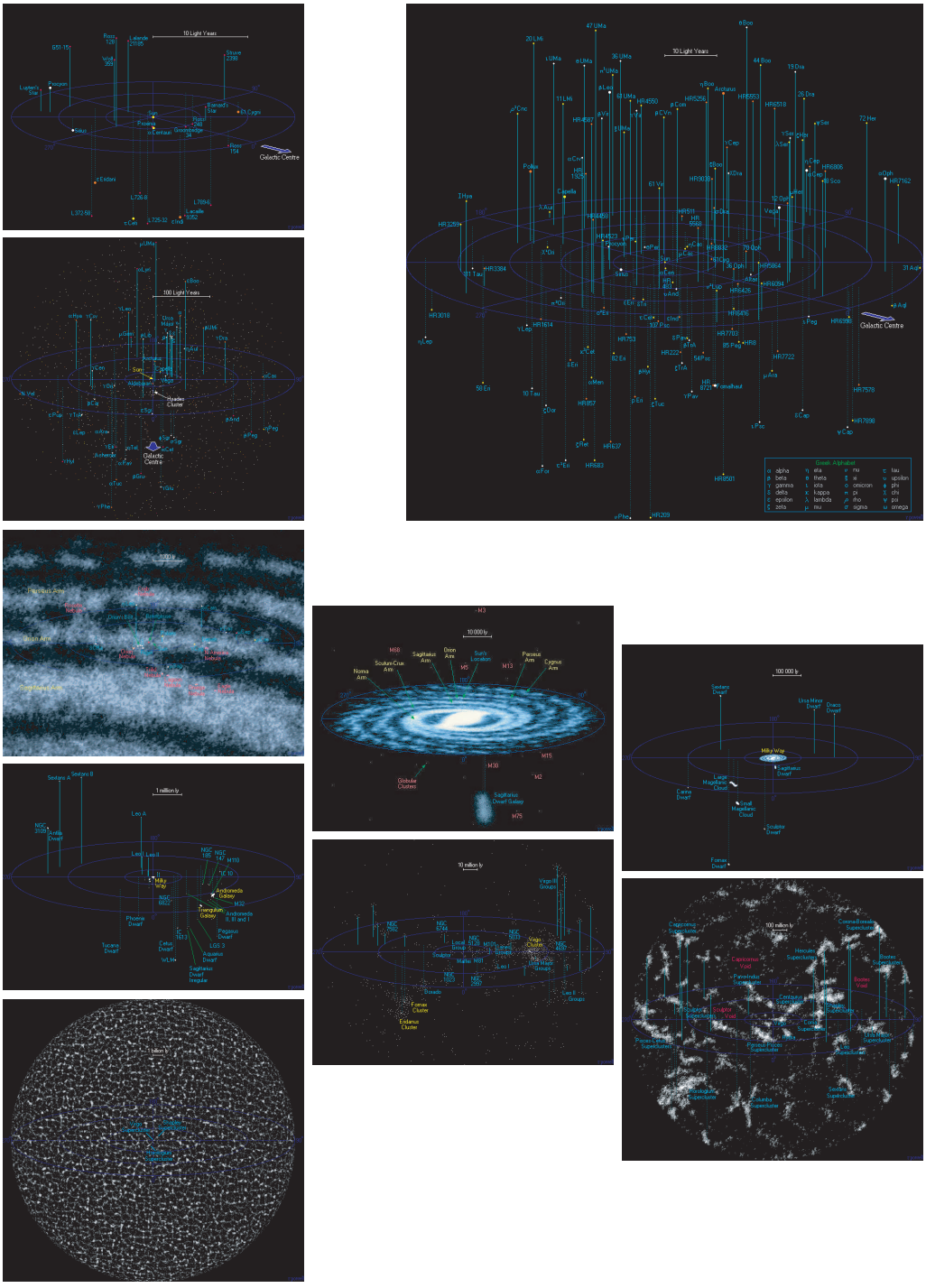


FIGURE 96 宇宙環境の地図: 図の縮尺は12.5, 50, 250, 5 000, 50 000, 500 000, 5百万, 1億, 10億, 140億光年 (© Richard Powell, www.atlasoftheuniverse.com)

れていない．（この増加の本質はなにか．私たちの冒険の終わりには，この事柄に立ち返ることになる.）

Vol. VI, page ??

— （信じられている）宇宙とは，すべての質量とエネルギーの全体だが，そこには観測できない物も含まれている．一般相対論の本には，観測可能領域外に物質やエネルギーが確実に存在していると書かれている．以下で，その確信の根拠について述べる．（そうだと思いますか？）

Challenge 318 e

— （完全な）宇宙とは物質と時空ばかりではなく，時空も含めた総体をいう．

これらの定義は，物理学や哲学において，しばしば，はっきり区別されず議論される．これらの言葉について，共通認識をもって受け入れられているわけではないので気を付ける必要がある．この本で，''宇宙''という言葉が出てきたときは，最後の定義で使っている．これから，繰り返し出てくると思うが，この定義についての明確な違いを考えておかないと，モーションマウンテンの登山は不可能である．（たとえば，完全な宇宙の物質とエネルギーの量は，観測可能な宇宙のそれと同じですか?）

Challenge 319 s

観測できる宇宙の‘大きさ’，もっと適切な言葉を使えば，地平線までの距離は想像できる量だ．10^{26} mとか一千億光年という値は想像を超える量ではない．地球の核からすべての鉄を取り出し，観測可能な宇宙の端まで届く細い線にしたとすると，その径はどのくらいになるだろう．その答えには，少し驚くかもしれない．また，宇宙の中身とは明らかに有限である．宇宙には，1立法メートルの砂粒と同じくらいの数の可視銀河がある．比較のために，典型的なサイズ150 µmの小麦粉の粉粒を恒星の大きさだとすると，入手可能なすべての小麦粉を詰め込むにはどのくらいの空間が必要だろうか?

Challenge 320 s

Challenge 321 s

恒星の色と運動

> Ἤ τοι μὲν πρώτιστα Χάος γένετ' ... *
>
> ヘシオドス, 神統記.

明らかに，宇宙は運動している．もう少し，宇宙を知るには，そこに存在するできるだけ多くの物体の速度と位置を測定する必要がある．20世紀，恒星や銀河についてのこのような観測がたくさん行われた．（どのように距離と速度を決定するかわかるか.）この豊富なデータは，次の2点にまとめられる．

Challenge 322 s

第1に，大規模スケール，つまり，5億光年くらいで平均をとった場合，宇宙の物質密度は一様で等方的である．小さいスケールになってくると，銀河とかチーズケーキ構造のような不均一性が見えてくる．たとえば，私たちの銀河系には一様性も等方性もない．しかし，大きなスケールで見ると，その差は平均化されなくなってしまう．この大スケールの物質分布の一様性を宇宙原理と呼ぶこともある．

Ref. 208

宇宙についての第2番目のポイントは，さらに重要である．1920年代，Carl Wirtz，Knut Lundmarkと Gustaf Strombergは，全体として，すべての銀河は地球から遠ざかっており，距離が離れていることを，別々に示した．アンドロメダ星雲のように，近隣の銀河でいくつかの例外はあるが，一般に，物体の遠ざかる速度vは，距離dとともに増加する．1929年，アメリカの天文

Ref. 209

* ‘まさに，初めに，カオスが生じ・・・.’ ヘシオドスの作といわれる神統記は紀元前700年頃に作られた．これはwww.perseus.tufts.eduのウェブサイトで，英語とギリシア語で公開されている．この有名な言葉は，117行目からの引用．

学者エドウィン・ハッブル (Edwin Hubble) * は，速度と距離の関係

$$v = H\,d\,, \tag{242}$$

に関する最初の論文を発表した．ここで，比例定数 H は，現在，ハッブル定数と呼ばれているものである．この関係を示すグラフFigure 97から，現在，知られているハッブル定数の値は，$71\,\mathrm{km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$ 程度である．(ハッブル自身の値は，この値よりかなり違っているため，現在では引用されない.) たとえば，2 Mpc** の距離にある恒星は，約142 km/sの速度で地球から遠ざかっており，さらに遠くの恒星は，それに対応して，さらに速い速度で遠ざかっている..

実際，Wirtz，Lundmarkおよび Strombergの発見は，どの銀河も，その他のすべての銀河から離れるように運動していることを意味している (なぜか) . いいかえると，宇宙の中の物質は膨張している．関係しているこの膨張のスケールや膨大な次元はとてつもない．空の数10億の銀河群の運動がたった一つの数式 (242) で記述されているのだ! 近くの銀河についてはさっき述べたように，また，遠くの銀河については後で述べるように，これから外れているものもある.

Challenge 323 s

宇宙原理と膨張を考え合わせると，宇宙のサイズが消え入るほど小さい頃の以前は，宇宙は存在できない．つまりは，宇宙は年齢は有限である．以下でに述べるが，進化の方程式を用いると，ハッブル定数の示す宇宙の年齢は138億年である．また，宇宙には，地球上に届く信号源の有限の最大距離，すなわち，地平線が存在することを膨張は意味している．地平線の向こうの源から，信号がやってくることはあり得ない．銀河の運動は重要なことを教えてくれる．昔，夜空，つまり，宇宙はずっと小さく，物質の密度は今より高かった．そして，物質はとても高温でもあった．ジョージ・ガモフ (George Gamow) *** は，1948年，高温の物質は光を放出するから，空は，夜間，真っ暗ではなく，かつて，'熱い'状態にあった時に放出された黒体輻射で満たされているに違いない予言した．その輻射は背景輻射とよばれ，宇宙の膨張とともに，冷やされていると考えられる．(示せるか.) Yakov Zel'dovichなど他の研究者も同様の予言をしていたが，この輻射はずっと後になって，二人の研究者によって発見されることになるのだが，彼らはこの予言を知らなかった．科学における最も有名なコミニュケーション欠如の例である．DoroshkevichとNovikovによる1964年の有名な論文の中で，彼らも，後に背景輻射を発見した研究者が使用したアンテナが，輻射の研究に最良の装置であることを述べていた! ともかく，1965年，アルノ・ペンジアス (Arno Penzias) とロバート・ウィルソン (Robert Wilson) がこの輻射を発見したのだ．この発見は，科学上，もっとも美しい発見の一つであり，二人は，

Ref. 210

Challenge 324 ny

Ref. 211

---

* エドウィン・ハッブル (Edwin Hubble) (1889–1953), 有名なアメリカの天文学者. アスリートとしてのキャリア, 法律学士取得後, 子供のころからの星への情熱に戻る. 最終的に, アンドロメダ星雲は私たち自身のものと同じ銀河であるというイマニュエル・カントの1755年の推測を証明した. つまり, 彼は, 天の川は宇宙のほんの小さな一部にすぎないことを示した.

** メガパーセックつまりMpcは30.8 Zmの距離に対応する.

Page 294

*** ジョージ・ガモフ (George Gamow) (b. 1904 オデッサ, d. 1968 ボルダー), 物理学者. 彼はアルファ崩壊をトンネル効果で説明し, マイクロ波背景輻射を予言した. 最初のポピュラー物理本である *1, 2, 3, infinity* や *Mr. Thompkins* seriesなどを書き成功した. これらの本は, その後, 多くの作家に模倣された.

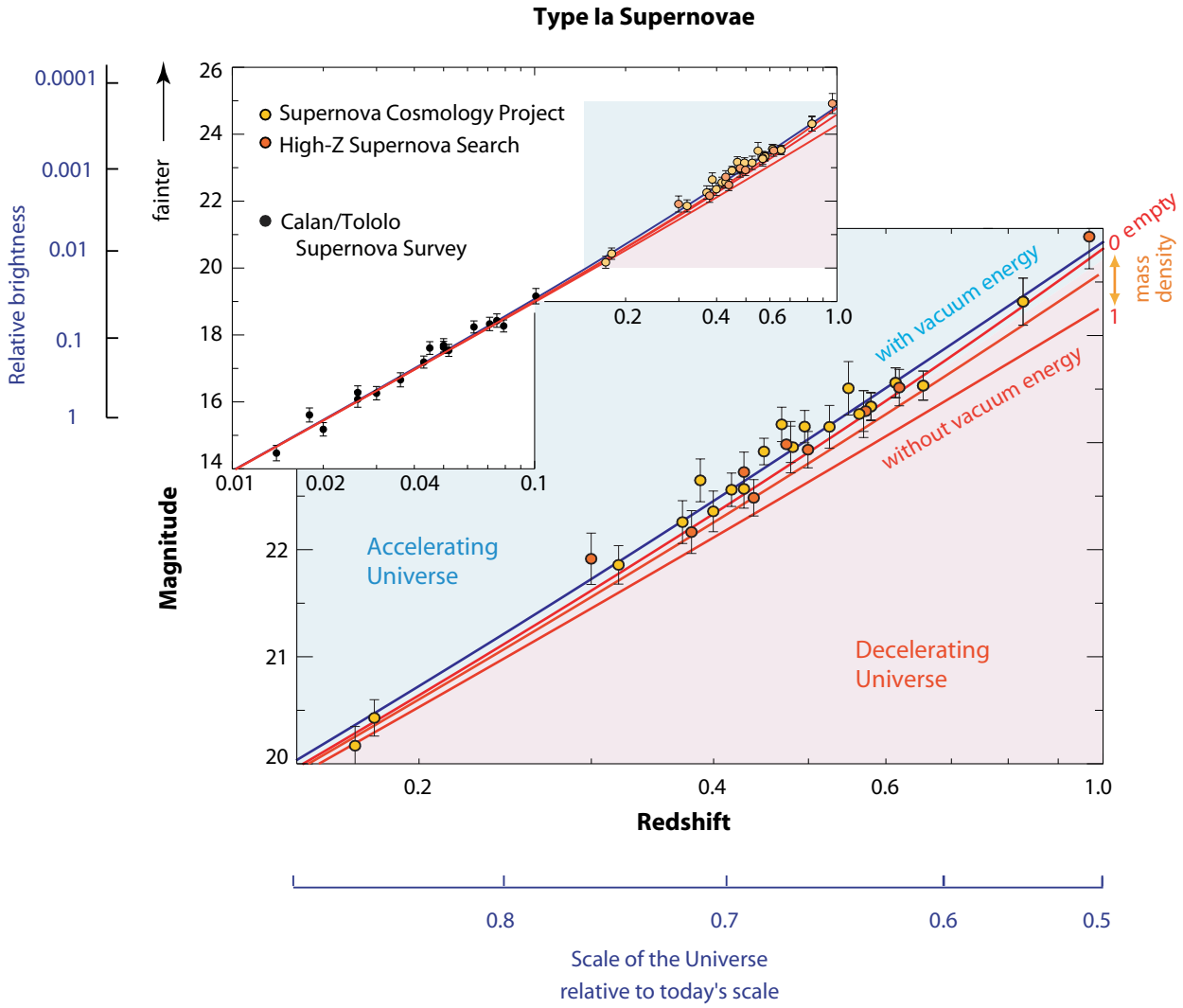


FIGURE 97 恒星の距離と恒星の速度の関係　Saul Perlmutter と Supernova Cosmology Projectの好意による)

Ref. 212 後に，ノーベル物理学賞を受賞した．この輻射は，Figure 98に示すように，2.728(1) Kの温度の物質の黒体輻射によるものであることがわかっている．実際，このスペクトルは 10^4 分1より良い精度で黒体輻射の依存性と一致している．

つまり，宇宙は熱いビッグバンで始まった．しかし，膨張と冷却以外にも，過去140億年には，他にも重要な出来事がいくつかあったのだ．

星は毎晩輝くのか

> 星は美しく輝いていませんか．そう輝いていること知っているのは世界中で私だけだ．
>
> Friedrich (Fritz) Houtermans (1903–1966)

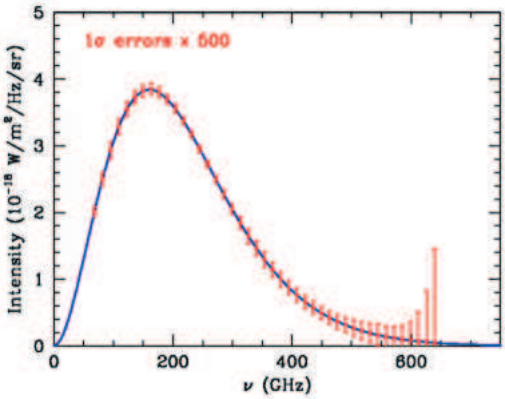


FIGURE 98 宇宙背景輻射の測定スペクトルと計算による2.728 Kのプランクスペクトル．誤差棒は500倍して描いてある．(NASA)

星は，変化することなく，いつもその場所にいるように思える．ところが，ときどき，空には，新しい星，
ii新星 (*nova*) が時々現れる．このnovaという名前はラテン語で‘new’を意味する．特に，明るい新星を
ii超新星 (*supernova*) と呼ぶ．新星やそれに類する現象から，星というのは，普通，ヒトの一生と比べるとずっと長い寿命を持っており，ヒトと同じように，生まれ，輝き，そして死んでゆくものであることを，私たちは思い起こす．

すべての恒星は，いわゆる，ヘルツシュプルング・ラッセル図上にプロットできる．どの天文学の書籍でも重要な位置をしめるこの図を，Figure 99に示す．これは，天文学者がよく使う方法の一例で，ある型の対象物の性質の統計をとり，恒星の寿命がたとえ人の寿命より長くても，対象物質のライフサイクルを導ける．例えば，この図を上手に使うと，Figure 100に示すM15星団のような星団の年齢を見積もることができる．その結果，この星団の年齢は130億年とすることができる．

恒星の寿命は有限であるので，その見え方，特に，赤方偏移には限りがある．実際，最近の望遠鏡で観測をしても，過去に恒星が存在していなかった場所 (時間) がある．この距離の所で見えるのはクエーサだけである．この光源は恒星ではなく，もっと質量の大きい明るい系である．この精密な構造は，まだ，天体物理学者により調べられている．

星が輝いているということは，ともかく，その星は形成されたということである．何百万年以上にわたり，空間の膨大なダスト雲が重力により収縮し，それから，高密度で高温の回転構造，つまり，新しい星が作られる．ダスト雲からの星の誕生を魅惑的なプロセスを詳述することが天体物理学の核心であるが，ここでは，これ以上踏み込まない． Ref. 213 恒星の一生や寿命はそれぞれである．その生涯は誕生時の質量に依存する．太陽クラスの恒星は10から20 Gaの寿命を持ち，赤色巨星として生涯を終える．太陽の20倍の質量を持つ恒星は数百万年の寿命しか持たず，超新星として生涯を終える．もっとも重い恒星は130太陽質量程度の質量を持つ．例外は，複数の恒星が融合して形

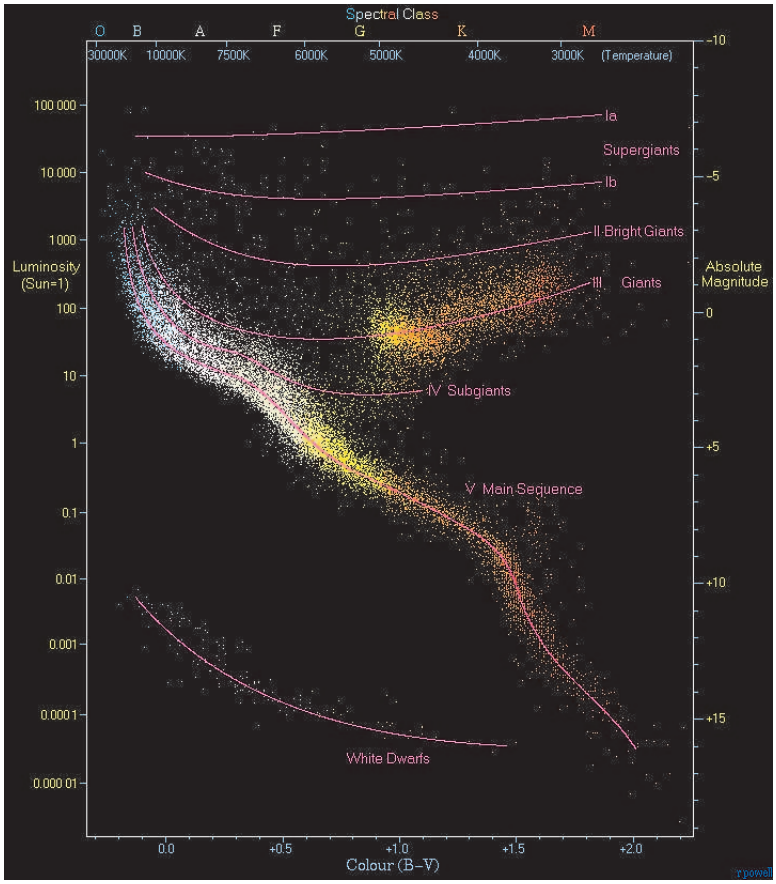


FIGURE 99 ヘルツシュプルング・ラッセル図 (© Richard Powell)

Ref. 214 成される恒星で，この場合，250太陽質量くらいの質量になる．

まだ，疑問の答えは得られていない．一体，星はなぜ輝くのか．明らかなのは，高温だから輝くのである．高温になるのは，内部の核融合反応

Vol. V, page ?? のためである．このプロセスについては別の巻で述べる．

宇宙の簡単な歴史

“Anima scintilla stellaris essentiae.*”
エフェソスのヘラクレイトス (Heraclitus of Ephesus) (*c.* 540 to *c.* 480 BCE)

Ref. 215

生まれ，輝き，死ぬのは恒星だけではない．銀河も同じである．では，宇宙はどうなのか．私たちの周囲の物質や輻射が経験してきた重要な出来事を

Ref. 216 Table 6にまとめる．まだ説明されていない内容については，これから述べてゆく．歴史表は畏敬の念を起こさせる．この歴史表は多分どんな理論物理学者も想像しないようなものになっている．事象の配列は非常に美しく印象的なので，ある種の心理セラピストが，患者の存在の背景にある

* ‘魂は星の基本物質の火花である’

FIGURE 100 メシア15 (M15) 球状星団. 年齢は130億年. (© ESA, NASA)

話を指摘したり, 価値を想起させるのに用いることができるであろう. お楽しみください.

TABLE 6 宇宙の簡単な歴史

現在からの時間 [a]	ビッグバンからの時間 [b]	できごと	温度
$c.\ 13.8 \cdot 10^9$ a	$\approx t_{\mathrm{Pl}}$ [b]	時間, 空間, 物質, 初期条件が決まっていない	10^{32} K $\approx T_{\mathrm{Pl}}$
$13 \cdot 10^9$ a	$c.\ 1000\ t_{\mathrm{Pl}}$ $\approx 10^{-42}$ s	物質と輻射から時空が区別され, 初期条件が決まる.	10^{30} K
	10^{-35} s to 10^{-32} s	インフレーションと GUTの世紀の始まり; 強い相互作用と電弱相互作用が分離	$5 \cdot 10^{26}$ K
	10^{-12} s	反クォークの消滅; 電磁相互作用と弱い相互作用が分かれる	10^{15} K
	$2 \cdot 10^{-6}$ s	クォークがハドロンに閉じ込められる; 宇宙は1つのプラズマ状態	10^{13} K

TABLE 6 宇宙の簡単な歴史 (続き)

現在からの時間 [a]	ビッグバンからの時間 [b]	できごと	温度
		陽電子の消滅	
	0.3 s	宇宙はニュートリノに対し透明になる	10^{10} K
	数秒	**原子核合成**: D, ^{4}He, ^{3}Heおよび^{7}Li 原子核形成; 輻射は依然として優勢	10^9 K
	2500 a	**物質優勢**始まる; 密度摂動増大	75 000 K
$z = 1100$	380 000 a	**再結合**: ビッグバンのこの後半の段階で, H, HeやLi 原子が形成される. 物質と輻射が切り離され, つまり, それらの温度が異なるようにり, 宇宙が光に対し'透明'になる. つまり, '夜'の空がだんだん暗くなり始める.	3000 K
		空は, 黒体輻射を除くと, ほとんど, 黒である.	$T_\gamma = T_o(1+z)$
$z = 10$ to 30		**銀河の形成**	
$z = 9.6$		これまでに確認された最古の物体	
$z = 5$		銀河団の形成	
$z = 3$	10^6 a	第1世代の恒星 (種族 II) が形成され, 水素融合が始まる. ヘリウム融合が炭素, ケイ素, 酸素を作り出す	
	$2 \cdot 10^9$ a	最初の恒星が超新星[c]爆発を起こす; 鉄が作られる.	
$z = 1$	$3 \cdot 10^9$ a	第2世代の恒星 (種族 I) 現れ, 引き続き, 老いた恒星の超新星爆発が, 今の私たちを構成する微量元素 (Fe, Se等) を作り出し, 銀河の中に吹き飛ばす	
$4.7 \cdot 10^9$ a		このような爆発で作られた原始雲が輝き始め, 押しつぶされる; **太陽の形成**	
$4.5 \cdot 10^9$ a		**地球**やその他の惑星 **形成**: 無生代始まる[d]	
$4.5 \cdot 10^9$ a		まだ液体状態にある地球と大隕石との衝突により放出された物質から月が形成される	
$4.3 \cdot 10^9$ a		惑星にクレータができる.	
$4.0 \cdot 10^9$ a		**始世代** 始まる: 宇宙空間からの衝突が止み, 地殻が固まり, 最古の鉱物が作られる;水が凝縮	
$3.5 \cdot 10^9$ a		単細胞 (微小な) 生物が出現;ストロマトライトが作られる	
$2.5 \cdot 10^9$ a		**原生代** ('最初の生命の 時代') が始まる: 微生物の活動のおかげで大気中の酸素が増加 Ref. 217	
$1.3 \cdot 10^9$ a		多細胞生物が現れ, 菌類が陸地を支配	
$800 \cdot 10^6$ a		地球が初めて氷に閉ざされる (原因はまだ不明) Ref. 218	
600 to $540 \cdot 10^6$ a		地球が最後に氷に閉ざされる	

TABLE 6 宇宙の簡単な歴史 (続き)

現在からの時間 [a]	ビッグバンからの時間 [b]	できごと	温度
$540(5) \cdot 10^6$ a		氷に閉ざされた時代が終わり, **古生代** ('古い生命の時代')が始まる:動物が出現, 最古の化石 (540(5)よりカンブリア紀, 495(5)よりオルドビス紀, 440(5)よりシルル紀, 417(5)よりデボン紀, 354(5)より 石炭紀, 292(5)より二畳紀)	
$450 \cdot 10^6$ a		陸生植物が出現	
$370 \cdot 10^6$ a		木の出現	
$250(5) \cdot 10^6$ a		**中生代** が始まる:多くの昆虫や他の生命形態が絶滅; 哺乳類が出現 (250(5) より 三畳紀, 205(4)よりジュラ紀, 142(3)より白亜紀)	
$150 \cdot 10^6$ a		パンゲア大陸がローラシア大陸とゴンドワナ大陸に分裂	
		プレアデス星団が形成される	
$150 \cdot 10^6$ a		鳥類の出現	
$142(3) \cdot 10^6$ a		恐竜の時代 (白亜紀) が始まる	
$100 \cdot 10^6$ a		アルプス山脈, アンデス山脈, ロッキー 山脈の形成が始まる	
$65.5 \cdot 10^6$ a		**新生代**の始まり:隕石が地球のユカタンに衝突し, 恐竜が絶滅, 草と霊長類が出現, (65.5より第三紀が始まる. この紀はさらに分けられ, 暁新世から始まり, 55.0からの 始新世, 33.7からの漸新世から構成される古第三紀, それに続き, 23.8 中新世と5.32鮮新世から構成される新第三紀, そして, 更新世 (または洪積層) と0.01 完新世 (または沖積層) から成る第四紀が1.81から始まる.)	
$50 \cdot 10^6$ a		巨大 哺乳類 出現	
$7(1) \cdot 10^6$ a		ヒト科の動物出現	
$3 \cdot 10^6$ a		超新星爆発, それに伴い, 宇宙線増加, 雲の発生率が高まり, 地球が急激に冷え, ヒト科動物の進化圧力が強まり. ヒト科が出現 Ref. 219	
500 000 a		銀河に最も若い恒星が形成f	
500 000 a		ホモ・サピエンス出現	
100 000 a		最後の氷河期到来	
90 000 a		ホモ・サピエンス・サピエンス出現	
11 800 a		最後の氷河期が終わり, 完新生始まる	
6 000 a		最初の表記文字	
2 500 a		物理学の始まり	
500 a		コーヒー, 鉛筆の使用, そして, 近代物理学の始まり	
200 a		電気の使用が始まる	
100 a		アインシュタインが論文を発表	
10 to 120 a		あなたが単細胞の存在だった	
現在	*c.* $14 \cdot 10^9$ a	あなたはこの本を読んでいる.	$T_\gamma = 2.73$ K, $T_\nu \approx 1.6$ K, $T_\mathrm{b} \approx 0$ K

TABLE 6 宇宙の簡単な歴史 (続き)

現在からの時間 [a]	ビッグバンからの時間 [b]	できごと	温度
将来		あなたは人生を楽しんでいる. もっと, 具体的には, 次の巻を読んでいる.	

a. ここで用いた時間座標はpage 222 で説明したように, マイクロ波背景輻射により定義される座標系によるものである. 1年は'a'で表している (ラテン語の'annus'). 最後の桁の誤差は括弧で示す.
b. この量はビッグバンが時空事象でないため, 厳密に定義できない. これについては後で説明する.
Vol. VI, page ??
c. 地球上の原子の歴史から, われわれは超新星の残渣から構成されていることが示されている. 私たちは, 本当に, 星屑できている.
d. 無生代は別にして, 地質年代尺度からの名前と年代はInternational Commission on Stratigraphyによる. 年代は放射線年代測定で決められる.
Vol. V, page ??

歴史の長大さと面白さを記そうとしても歴史表には限界がある. たとえば, 最近の数十億年の間に他の場所で何が起きたのだろうか. まだ, 書いておくべきことはあるが, そのことについて私たちはほとんど何も知らない. 当然, 研究は, この地球を中心に行われている.

天体物理学の研究は, 天界で観測されるすべての現象を発見し理解するのが目的である. 私たちの冒険では, 魅力的な話題の多くを省略しなければならない. なぜなら, 運動に焦点を絞りたいからだ. 興味深いことには, 一般相対論のおかげで, 宇宙で起きる運動についての多くの一般観測結果を説明することができる.

時空の歴史

> "たくさんのウサギが, 同じ速度で中心点からあらゆる方向に逃げ出した. 走っている最中に, 一匹のウサギが振り返ると, 驚くべきことを目にした. どのか."
>
> Challenge 325 s

Page 209 宇宙全域が恒星でちりばめられていることを示すデータから, ある単純な結論に到達する. つまり, 宇宙は静的でない. 重力により, 物体の間隔はいつも変化している. 例外は円軌道ぐらいである. 重力は物質間の平均距離も変化させる. 雲があると重力はそれをいつもいつもつぶそうとする. 宇宙最大の雲は, 宇宙のすべての物質から構成される雲と考えられるが, 収縮しているか, それとも, 依然として膨張しているかは別にして, これも変化しているに違いない.

この結論を最初に導いたのはアレクサンドル・フリードマン* である. Ref. 220 1922年, 彼は, 一様かつ等方的な質量分布の場合に起こりうる宇宙の進化を

* アレクサンドル・アレクサンドロヴィチ・フリードマン (Aleksander Aleksandrowitsch Friedmann) (1888–1925), 宇宙の膨張を予言した物理学者. 発疹チフスにより早逝したが, 神父で宇宙学者のジョルジュ・ルメートル (Georges A. Lemaître) (b. 1894 シャルルロア, d. 1966 ルーヴェン)が取り上げ, 1927年に, 初期状態として特異点を持つ解に焦点を絞りそれを拡張するまではほとんど無名であった. ルメートルはビッグバンは'創生'の'事象'と考え (誤りである!), それを彼の全組織に説いてまわった伝道者の一人であった. フリードマン–ルメートルの解は, ずっと後の1935と1936年, この解を再び研究した二人の学者, H.P. ロバートソン (H.P. Robertson) とA.G. ウォーカー (A.G. Walker) により, しばしば, 誤りであると言われた.
Page 231, page 232

導出した. 彼の計算は簡潔だが, きわめて論理的な古典的計算の例である.
Challenge 326 ny あらゆる点で一様かつ等方的な宇宙における時空の線素は

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - a^2(t)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) \,. \tag{243}$$

となる. ここで, $a(t)$ という量はスケール因子と呼ばれている. 物質は密度 ρ_{M} と圧力 p_{M} で記述される. これらを場の方程式に代入すると, 学生ならだれでも理解できそうな二つの方程式,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\mathrm{M}} + \frac{\Lambda}{3} \tag{244}$$

および

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_{\mathrm{M}} + 3p_{\mathrm{M}})\, a + \frac{\Lambda}{3}\, a \,. \tag{245}$$

が得られ, これを合わせると

$$\dot{\rho}_{\mathrm{M}} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_{\mathrm{M}} + p_{\mathrm{M}}) \,. \tag{246}$$

となる. 現在の時間 t_0 における物質の圧力は無視する. (以下では, 添え字0は現在の時間をあらわす.) この場合, $\rho_{\mathrm{M}}a^3$ は時間的に一定である.
Challenge 327 e

式 (244) と (245) は2つの自然定数にしか依存していない. 一つは, 自然の最大力または最大仕事率に関連している重力定数G, もう一つは真空のエネルギー密度を表す宇宙定数 Λ で, 後者は自然の最小力と考えてもよい.
Page 124

これらの式の説明をする前に, 用語について少し触れておく. 普通, すべての質量密度は,
Challenge 328 ny

$$\rho_{\mathrm{c}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx (8 \pm 2) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/m^3} \tag{247}$$

で表される, いわゆる, 臨界質量密度 ρ_{c} に関連付けて考える. この値は1立方メートルあたり約8個プラスマイナス2個の水素原子に対応している. 地球上では, この値というのは極端に良い真空といってよいだろう. 概して, 日常生活と宇宙の間にはこれほどの差が存在している. どのような場合でも, この臨界質量密度を用いて, 永久膨張と収縮の中間状態の宇宙の進化をもたらす宇宙の物質分布を記述する. 実際, この密度が臨界といえるのは, 宇宙定数がゼロの場合のみで, 臨界密度で, いわゆる, 進化の境界となる. この制限条件があるにもかかわらず, 「臨界質量密度」が他の場合でも使われている. ここで,

$$\Omega_{\mathrm{M}} = \rho_0/\rho_{\mathrm{c}} \,. \tag{248}$$

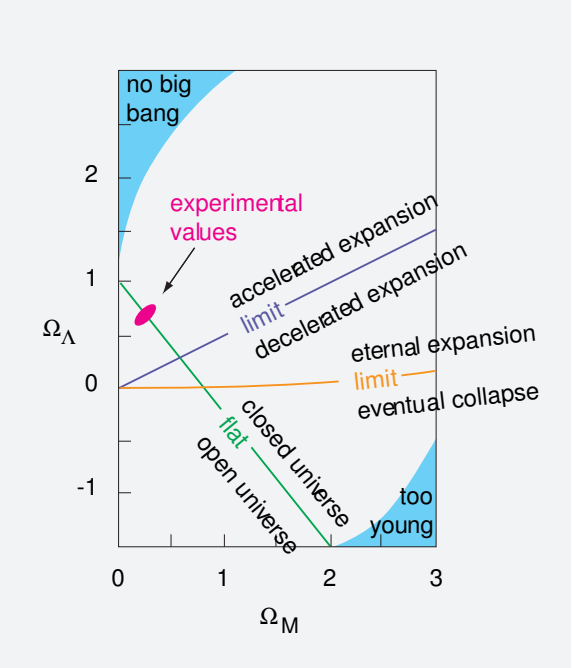


FIGURE 101 パラメータ Ω の範囲とその影響

で定義される無次元質量密度 Ω_M ついて述べる. 宇宙定数は,

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G \rho_c} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \,. \tag{249}$$

と置くことで, この臨界密度と関係づけることができる. 3番目の無次元パラメータ Ω_K は, 空間の曲率を記述するものである. これは, 現在の宇宙の半径 R_0 と曲率定数 $k = \{1, -1, 0\}$ を用い,

$$\Omega_K = \frac{-k}{R_0^2 \, H_0^2} \tag{250}$$

のように定義され, その符号は曲率 k の符号と逆になる. また, 曲率がゼロの場合は, Ω_K はゼロになる. 一様で等方的な時, 正に曲がる宇宙は必ず閉じていて有限の体積を持つ. 同じ物質分布を持つ平坦または負に曲がった宇宙は開いている可能性がある. つまり, 無限の体積を持つことができるが, そうでなくてもよい. つまり, 単連結にも複連結にもなりうる. これらの場合では, トポロジーは曲率で完全に決まらない.

現在のハッブルパラメータは $H_0 = \dot{a}_0/a_0$ で定義される. 式 (244) から, 中心的となる関係式

Challenge 329 ny

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \,. \tag{251}$$

が得られる．　かつて，　データが不足していいたころ，　物理学者は二派に別れていた．　つまり，　閉所恐怖症派は　$\Omega_K > 0$　を信じ，　広場恐怖症派は $\Omega_K < 0$　を信じていた．　これらのパラメータの測定値についてもう少し詳しく述べておこう．　Figure　101に，　このパラメータの重要な領域とそれに対する宇宙の性質を合わせて示す．　最近の測定結果では，　$\Omega_K = 0$で，　平坦な宇宙を支持している．

ハッブルパラメータの最近の測定値は

$$H_0 = 71 \pm 4\,\mathrm{km/sMpc} = 2.3 \pm 2 \cdot 10^{-18}\,/\mathrm{s} \tag{252}$$

となっており，　これから，　宇宙の年齢は138 ± 10億年になる．　つまり，　時空の歴史から導出した年齢は，　前述した恒星の歴史から導かれた年齢と一致している．

宇宙の進化の感覚を掴むために，　いわゆる減速パラメータ　q_0　をよく使う．　このパラメータは

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2} = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda\,. \tag{253}$$

で定義される．　パラメータq_0は，　膨張が減速している時には正，　加速している時には負の値になる．　これらの可能性もFigure　101の図に示してある．

宇宙が膨張し，　圧力が減少する様子をもう少し明確に示すために，　$\tau = t\,H_0$　と　$x(\tau) = a(t)/a(t_0)$　を用いて，　式　(244)　を書き換えると，

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + U(x) = \Omega_K$$
$$\text{where}\quad U(x) = -\Omega_\Lambda x - \Omega_\Lambda x^2\,. \tag{254}$$

が得られる．　この式は，　ポテンシャル　$U(x)$　の中で全エネルギー質量　Ω_K　を持つ質量　1　の粒子の運動の進展を示す方程式に似ている．　この結果，　どういう風に変わってゆくかは簡単に導ける．

Ω_Λがゼロの場合，　宇宙は永遠に膨張を続けるか，　再収縮のどちらかであるが，　これは質量-エネルギー密度の値に依存する．

Ω_Λがゼロで無い正値の場合は，　ポテンシャルが1つの極大値を持っている．粒子が最大値を超えるだけのエネルギーを持っていれば，　加速を続けるので，状況的には宇宙は現在と同じような感じになる．

ある時間範囲における結果をFigure　102に示す．　指摘しておくべきことが2点ある．　起こりうる曲線の組は2つのパラメータで記述されている．　1つではない．　さらに，　各線はゼロの大きさまで描かれていない．　これには，2つ理由がある．　非常な高エネルギーで物質がどんなふるまいをするか不明であることと非常な高エネルギーで時空がどんなふるまいをするか不明だからだ．　この重要なトピックについては後で触れる．

フリードマンのの研究結果から導かれた主な結論は，　一様で等方的な宇宙は静的ではないということだ．　つまり，　膨張か収縮のいずれかをしている．いずれにしても，　年齢は有限である．　この基本的な考えは宇宙学のコミュニティに浸透した．　アインシュタインですら，　この考え方に慣れるのに長

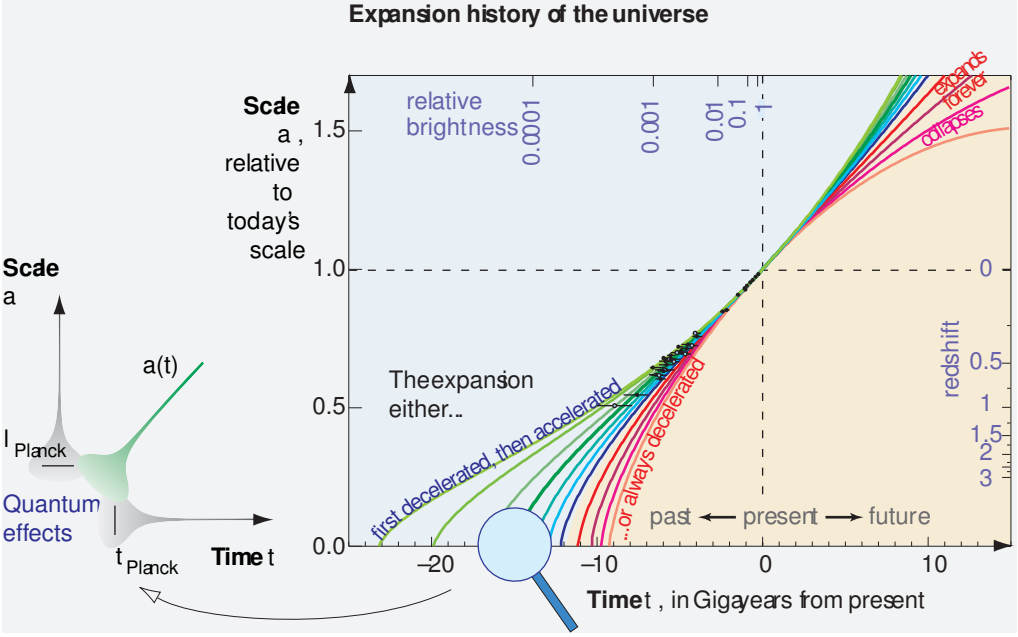


FIGURE 102 異なった質量密度における宇宙スケールの時間変化と測定データ (右のグラフはSaul PerlmutterとSupernovaCosmology Projectの厚意による)

い時間かかった.

等方的な膨張のおかげで宇宙には都合のいい座標系があることに注意してほしい. 平均の物質ににより定義される座標である. この座標で測定される時間はTable 6で一覧表になっている時間で, 私たちが宇宙の年齢を論ずる際に仮定している時間である.

長いスパンでの時間変化を考えたとき, 起こりうることをまとめたのが, Figure 103である. 進化の可能性は多種多様である. 20世紀初頭, 人々は個人的な好みでこれらの中から結論を導いていた. アルバート・アインシュタインの一番のお気に入りは $k = 1$ と $\Lambda = a^{-2} = 4\pi G\rho_M$ の解であった. これは, $x(\tau)$ がポテンシャル $U(x)$ の頂点にあるときに見つかる不安定な解である.

1917年, アインシュタインも落胆しただろうが, オランダの物理学者ウィリアム・ド・シッター (Willem de Sitter) は, $\rho_M = p_M = 0$ かつ $k = 1$ である空っぽの宇宙も可能であることを見出した. このタイプの宇宙は, 長い期間, 膨張する. ド・シッターの宇宙は, 特殊なケースにあっては, 物質がなくても時空は存在することを示している.

Challenge 330 ny

ルメートルは, その時, すでに, 正の質量に対しては宇宙は膨張することを発見しており, この結果はアインシュタインにより試された. 後になって, この計算が測定により検証された時, 質量を持ち膨張する宇宙というものがあたりまえになってきた. 教科書においても標準のモデルとして紹介されるようになった. 1950年から1990年あたりには, 盲目的に, 誰もが $\Lambda = 0$ * を信じた. 20世紀の終わりころになると, 後述するよ

* この場合, $\Omega_M \geqslant 1$ に対しては, 宇宙の年齢は $t_0 \leqslant 2/(3H_0)$ となる. ここでは, 限界値どうしが対応している. 質量密度がゼロの場合, $t_0 = 1/H_0$ となる.

Challenge 331 ny

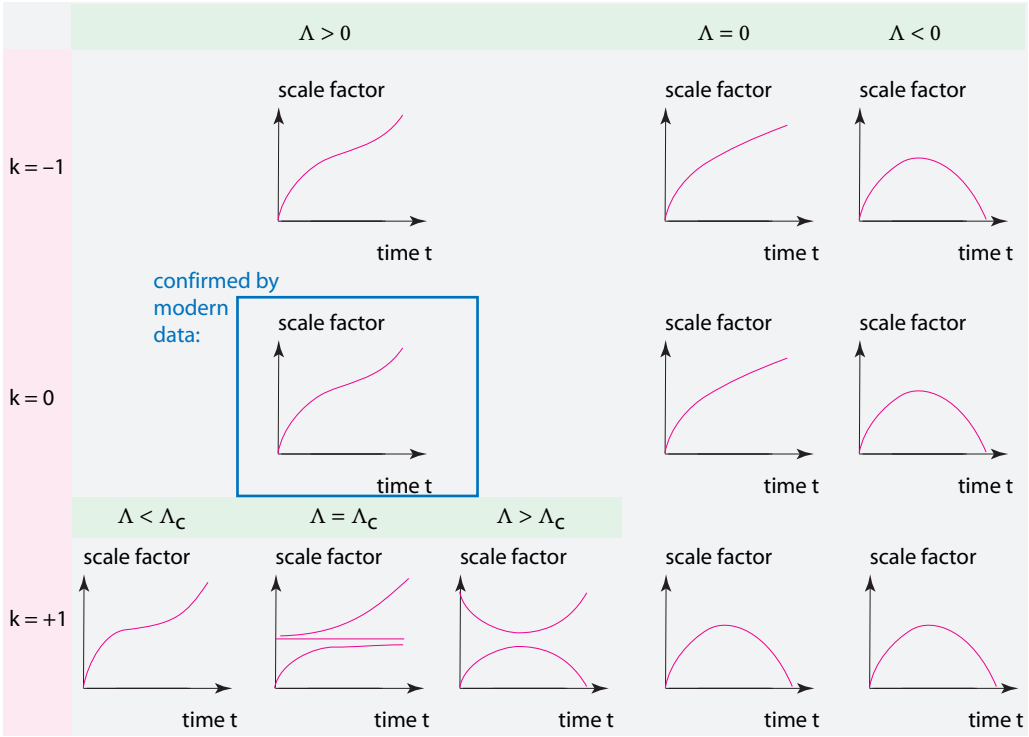


FIGURE 103 様々なパラメーターに対する宇宙スケール因子aの長期変化

うに，　実験の進歩に伴い，　信奉や好みではなく証拠に基づいた主張が可能になってきた．　しかし，　まずは，　この古い考え方を調べよう．

夜，なぜ，空は暗い?

> In der Nacht hat ein Mensch nur ein Nachthemd an, und darunter kommt gleich der Charakter.*
>
> Rober Musil

まず，　夜空は黒ではない．　暗い青である．　地球表面から見ると，　Figure 104が示すように，　長時間露出をすると，　昼間の青と同じである．　昼間の空と同じように夜空が青いのは，　星からの光が大気により散乱されているからである．　空の本当の色を知りたければ，　大気の外に出る必要がある．そこで目にする空の色はピッチの黒である．　しかし，　精密な測定を行うと，何もない夜間の空も完全な黒ではない．　200 GHzあたりの輻射で満ちている．もっと正確には，　2.73 Kの物体の熱放出に対応する輻射で満ちている．　この宇宙背景輻射はビッグバンのなごりの熱輻射である．

Ref. 221　宇宙は恒星より冷たい．　しかし，　なぜ，　そうなのだろう．　もし，　宇宙が大規模スケールで一様で，　無限に大きいとしたら，　無限の恒星が存在するだろう．　そして，　どの方向にも，　星の表面が見えるだろう．　そうすると，　夜の空は太陽表面と同じくらい明るいだろう．　このことをあなたのおばあさんに納得させられますか．　Challenge 332 s

* '夜，人はナイトガウンのみを羽織り，その下に，直接，性格がある．' ロベルト・ムージル (Robert Musil) (b. 1880 クラーゲンフルト，d. 1942 ジュネーブ)，作家

FIGURE 104 空の青さのようなすべての色は夜間でも存在しており, 長時間露出をすれば見える. 左上の輝く物体は火星, 下半分には月光により作られたかすかに色のついた霧の虹が見える. (© Wally Pacholka)

深い森では, Figure 105のように, どの方向にも少なくとも1本の木は見える. 同様に, '深い' 宇宙では, あらゆる方向に少なくとも1個の恒星は見える. 今, 平均的な恒星は約6000 Kの表面温度を持つとする. 私たちが深くて古い宇宙に住んでいるとしたら, 約6000 Kの温度のオーブンの内部に住んでいるようなものである. このような気候だったら, とても, アイスクリームを楽しんでいる余裕なんてないだろう.

それでは, 6000 Kの恒星からの輻射, つまり, 白い光でみたされているにもかかわらず, なぜ, 夜空は黒いのだろうか? このパラドクスは, 1823年に, 天文学者ヴィルヘルム・オルバース (Wilhelm Olbers) * により, 明確に規定された. 彼はこの疑問を広く議論したことから, オルバースのパラドクス.と呼ばれている.

現在, 2つの主要な効果で夜の暗さを説明することがわかっている. まず, 宇宙の年齢は有限で, 遠くの恒星は輝き始めてから年が浅いということである. まだ若い段階にあるか, 形成段階にあった暗い頃の恒星を私たちは見ている. その結果, 遠方の恒星の明るさへの寄与は, 近くの恒星

* ハインリッヒ・ヴィルヘルム・マテウス・オルバース (Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers) (b. 1758 アルベルゲン , d. 1840 ブレーメン) は著名な天文学者. 2つの小惑星, パラスとヴェスタ, 5個の彗星を発見した. 彼は今日でも使用されている彗星の放物線軌道の計算法を開発した. オルバースは, 数学者であり天文学者のフリードリッヒ・ヴィルヘルム・ベッセル (Friedrich Wilhelm Bessel) の職業選択の折り, サポートも行った. このパラドクスはオルバースの名前を付して呼ばれているが, それ以前の1774年にスイスの天文学者 Jean Philippe Loÿs de Cheseauxや1610年にヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler) など他の人によってすでに指摘されていた.

Vol. I, page ??

FIGURE 105 上図: 深い, または, 無限の森で木だけが見え, 背後には何もない. 下図 : 夜間, 背景, すなわち, 黒い空の他見えるのは星. 従って, 宇宙は有限のサイズである. (© Aleks G/NASA/ESA)

と比べて小さいため, 空の平均温度は下がる. * また, たとえ, 宇宙のすべての物質を光に変換したとしても, 依然として, 宇宙は計算したほど明るくない. つまり, 今, 述べたオーブンの明るさを作り出すには, Ref. 222 恒星の仕事率と寿命は余にも少なすぎる. 第2に, 遠くの恒星の輻射は赤方偏移しており, 輻射が満ちている体積が増加し続けているため, 空の実効平均温度が低くなっていることもある.

* 空が黒いのは, 空が黒で塗られているからでも, 黒のチョコレートからできているからでもないことを説明できるか. もっと, 一般的には, 空は, オルバース自身が示唆し, 1848年にジョン・ハーシェル (John Herschel) が異議を唱えているように, 何か黒くて冷たいもので出来ているとか, そんなものを含んでいるのではないことを説明できるか. Challenge 333 ny

夜の暗さについて，どちらの理由が重要かを決めるには，計算してみる必要がある．このテーマはポール・ウェッソン (Paul Wesson) により，詳細に調べられ，，有限の星の最大寿命とによるという前者の理由のほうが，赤方偏移という後者の理由より3倍ほど大きいと説明している．しかし，いずれの効果も宇宙の年齢が有限であることによるものである．従って，夜空が暗いのは，宇宙が有限の年齢をもっているからだと言えるかもしれない．

Ref. 223

空の暗さというのは，光の速度が有限であることから生じている．これを確認できるか?

Ref. 221

Challenge 334 e

また，空の暗さは，宇宙が大きな (しかし有限の) 年齢であることを教えてくれる．実際，2.7 K背景輻射は，3000 Kで放射されているにもかかわらず，冷たい．これはドップラー効果による赤方偏移である．理にかなった仮定をすると，この輻射の温度Tは，宇宙のスケール因子 $a(t)$との間に，

Ref. 224

$$T \sim \frac{1}{a(t)} \,. \tag{255}$$

という関係がある．若い宇宙に，たとえ星が存在していても，それを見ることはできないだろう．

太陽のような平均的な恒星の $3 \cdot 10^{-13}$ 倍程度の夜空の明るさからおもしろいことがわかる．宇宙の恒星の密度は私たちの銀河系の恒星の密度と比べると非常に小さい．銀河系の恒星の密度は，私たちが夜に見ている恒星の数を数えるとわかる．しかし，宇宙全体の星の密度が銀河系の星の密度と同じであるとしたら，夜の明るさはもっと大きなものになるだろう．したがって，夜空の明るさの測定と空の恒星の計数から，単純に，銀河系の大きさは宇宙と比べるとずっと小さいことがわかる．具体的に計算できるか?

Ref. 222

Challenge 335 e

まとめると，時空と物質は有限の年齢をを持ち, 生まれてから長い年月が経過しているため，空は黒い，正しくは，夜は非常に暗い．おまけで，クイズを出します．重力に対するオルバースのパラドクスはあるのか.

Challenge 336 ny

夜空の色変化

夜空は黒いばかりではない．夜空の暗さは私たちが見る方向により違っている.

地球が星全体の平均に対し運動をしていると考えると，空の闇の色はドップラー偏移している．ところが，この運動を補正しても，ある色変化が残る．この変化は微かなものだが，特殊な衛星で測定できる．もっとも精密なものは，2013年にEuropean Planck衛星で採取されたもので，Figure 106に示す．これらの温度変化はマイクロケルビンの範囲だが，検出された光が放出されたころに宇宙はすでにある種の非一様性があったことを示している．従って，Figure 106は38万歳に満たない'若い'ころの宇宙の様子を映し出している.

Figure 106のデータの非常に細かい部分はまだ解析中である．これにより研究者は宇宙の正確な年齢– 13.8 Ga – その構成成分や多くのこと導き出すことができる．研究はいまなお続いている.

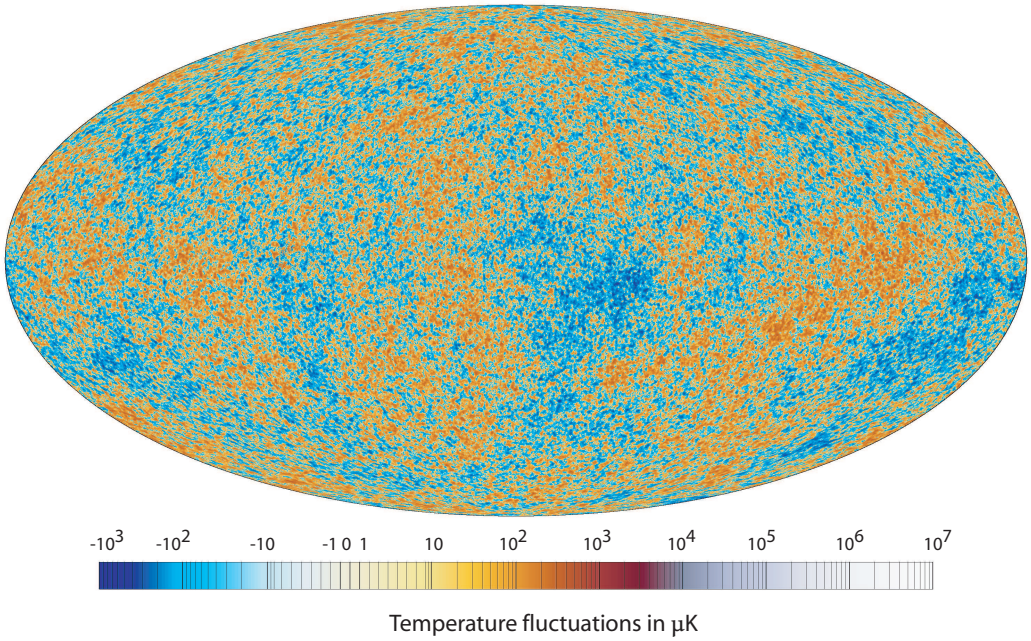


FIGURE 106 宇宙背景輻射の揺らぎの色付けされた図. 私たちの運動からくるドップラー効果と天の川からの信号は差し引いてある. (© Planck/ESA)

宇宙は開いているのか, 閉じているのか, 境界にあるのか?

> – 宇宙の広大さを考えると自分はちっぽけなものと感じませんか.
> – 宇宙の助けがなかったら私はちっぽけなものと感じるでしょう.
>
> 作者不詳

宇宙の歴史は二つの言葉でまとめられる:バン！...クランチ. しかし, 宇宙は本当に再収縮するのか, それとも, 永遠に膨張するのか. それとも, その中間の境界状態にあるのか. 運命を決めているパラメータは質量密度と宇宙定数である.

20世紀の天体物理の最後の10年の大きなニュースはこれらのパラメータの決定を可能にする実験結果が得られたことである. いくつかの手法が用いられている. 第1の方法は明らかで, 遠方の恒星の速度と距離の決定である. 距離が大きく離れると, 恒星がかすかになり, なかなか, 難しい. しかし, 現在では, 爆発による明るい超新星を求めて空を探索し, その明るさから距離を決定することが可能になってきている. 現在では, 利用できる最大の望遠鏡を用い, コンピュータ化して空の捜索を行っている.

Ref. 225

第2の方法は宇宙マイクロ波背景の非等方性を測定することである. 角度の関数としての観測されたパワースペクトルから, 時空の曲率が導出できる.

第3の方法は, 銀河や銀河団の近くで曲げられる遠方のクエーサーの光を用い, 重力のレンズ効果から質量密度を決める方法である.

Page 236

第4の方法は銀河団を用いて質量密度を決定する方法である. これらの方法は, すべて, 近い将来, 飛躍的に改良されるだろう.

Ref. 226 現在, これらの4組のの完全に独立な測定より, 値

$$\Omega_{\mathrm{M}} \approx 0.3 \quad , \quad \Omega_\Lambda \approx 0.7 \quad , \quad \Omega_{\mathrm{K}} \approx 0.0 \tag{256}$$

が得られている. ここで, 誤差は0.1のオーダーまたはそれ以下である. これらの値は宇宙は空間的に平坦で, 膨張が加速しており, ビッグクランチはないことを意味している. しかし, トポロジーについて明確なことは言えない. この最後の話題については, すぐ後で, 立ち返る.

Page 237

特に, このデータは, すべてのダークマターを含めた物質の密度が臨界値の約3分の1しかないことを示している. * 3分の2以上は宇宙項で与えられる. 宇宙定数 Λ は, 現在の測定結果によると

$$\Lambda = \Omega_\Lambda \frac{3H_0^2}{c^2} \approx 10^{-52}\,/\mathrm{m}^2 \,. \tag{257}$$

となる. この値は量子論にとって重要な意味をもつ. つまり, この値は真空エネルギー密度が

$$\rho_\Lambda c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \approx 0.5\,\mathrm{nJ/m}^3 \approx \frac{10^{-46}\,(\mathrm{GeV})^4}{(\hbar c)^3} \,. \tag{258}$$

に対応しているからだ. しかし, 宇宙項は負の真空圧力 $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$ も意味する. この結果を相対論から導かれる万有引力ポテンシャルの関係式

Page 185

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho + 3p/c^2) \tag{259}$$

Ref. 227 に代入すると.

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho_{\mathrm{M}} - 2\rho_\Lambda) \,. \tag{260}$$

Challenge 337 ny となる. したがって, 質量 M の周囲の重力加速度は

$$a = \frac{GM}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}c^2 r = \frac{GM}{r^2} - \Omega_\Lambda H_0^2\, r \,, \tag{261}$$

となり, 正の真空エネルギーは実際は反発の重力効果につながる. 宇宙定数 Λ に上述の値 (257) を代入すると, 地球と太陽間の距離であっても, この反発力効果は無視できることがわかる. 実際, 反発力効果の大きさはは引力と比べると非常に小さく, 万有引力からのずれを実験的に検証するのは完全に不可能である. Challenge 338 ny おそらく, 天体物理学的に決定するのが唯一残された可能性であろう. 特に, 正の重力定数は膨張率の正の成

* 全質量密度と別途測定されたバリオン物質密度の差もまだ説明されていない. 後者は前者の1/6しかない. 宇宙には未知のタイプの物質が存在しているのかもしれない. 宇宙はWYSIWYGではない, つまり, 見えない物質, または, 暗黒物質があると言える. この暗黒物質問題は宇宙論の重要な未解決問題の1つである.

分を通して現れる.

しかし, 状態はよくわからない. 宇宙定数の源は一般相対論では説明されない. このミステリーを解くには量子論の助けを借りるしかない. 実際, 宇宙定数は天体物理学の手法で検出される自然現象の局所的かつ量子的側面をもつ初めてのものである.

なぜ宇宙は透明なのか?

雨を説明するために宇宙を水で満たすことを書いた有名な本があったが, このようにして, 透明な宇宙を作ることはできるのだろうか. 答えはノーである. 空気だったとしても, その全質量により, 宇宙は今のサイズに到達できず, ずっと昔に, 再収縮してしまっていて, 私たちは存在していないだろう.

Ref. 228

Challenge 339 ny

宇宙はほとんど空っぽだから, 透明なのである. しかし, なぜ, これほど空っぽなのであろうか. 一つには, 宇宙のサイズが小さかった時期, すべての反物質が対応する量の物質と対消滅したからだ. もともと, 反物質よりほんの少しだけ多かった少量の物質が残った. 10^{-9} というこの割合が, いま私たちが見ている物質である. 結果として, 宇宙には電子やクオークの 10^{9} 倍の光子が宇宙には存在している.

さらに, 反物質が消滅して380 000年経って, 原子核と電子が再結合し, 原子が形成され, それらが集まって星や人が作られた. 光と相互作用する自由電荷はもう目につかず, そのため, 光は恒星やダスト粒子や 原子に衝突して影響は受けるものの, そのころから, 現在と同じように空間を走り回っている. この宇宙背景輻射の観測から, 光は外乱を受けることなく130億年以上にわたって運動を続けている. 実際, 宇宙の平均密度は $10^{-26}\,\mathrm{kg/m^3}$ で, 物質の大部分は銀河の中で重力により塊となっていることから, その隙間部分は優れた真空状態になっていると想像できる. その結果, 光はあまり邪魔されることなく, 長い距離を運動できる.

ところで, なぜ, 真空は透明なのだろうか. これはさらに奥の深い疑問である. 真空が透明なのは, 電荷や地平線が存在しないからである. 光が吸収されるには, 電荷と地平線は不可欠である. 実際, 量子論によると, 真空には, いわゆる, 仮想電荷と言うものが存在している. しかし, これらの仮想電荷は真空の透明性には影響しない.

Vol. V, page ??

ビッグバンとその結果

> Μελέτη θανάτου. 死ぬことを学べ.
> プラトン (Plato) , パイドン, 81a.

ともかく, 星や銀河の色から考え出されたホットビッグバンモデルによれば, 約140億年前, 全宇宙は極めて小さかった. ビッグバンと言う名前は, ここからきている. この言葉は, 1950年, フレッド・ホイル (Fred Hoyle) により, (皮肉を込めて) 命名された. 彼は自然に対して用いられることは絶対ないと信じていた. ところが, この言葉は流行してしまった. 過去に宇宙が小さかったことを直接的に確認できないので, 他に, それを示す結果がないか探す必要がある. 主な結果を以

Page 211

Ref. 229

下に示す　：

– すべての物質は，　他のすべての物質から遠ざかっている．　重要な点は，モデルが提唱され前に観測されていたことである．
– 宇宙のどんな系の年齢も有限である．　最近，　その中の最大の年齢が13.8(1) Ga，　およそ140億年とであることが見つかった．
– 熱的背景輻射が存在している．　観測された温度　2.7 K　はビッグバンモデルとは独立に発見され，　最大年齢値から導かれるものと一致している．
– 宇宙の質量の約75 %が水素，　23 %がヘリウムで構成されており，　これらの値は予想値と一致している．
– 宇宙定数　Λ　がゼロではなく，　宇宙の膨張が加速している．　その値は予測できないが，　加速は観測されている．
– 宇宙定数がゼロではなく，　それにより，　万有引力はほんの少しだけ小さくなっている．　この点はまだ未確認である．
– 約2 K　の温度の背景ニュートリノが存在する．　正確な予測は　$T_\nu/T_\gamma \approx (4/11)^{1/3}$　で，　これらのニュートリノはビッグバン後，　約0.3秒後に出現した．　この点はまだ未確認である．

これらの結果は，　ホットビッグバンモデルを裏付けていることを強調しなければならないが，　歴史的にモデルから予言されたのは背景温度だけである．　ニュートリノの温度と万有引力からのずれという最後の2点はまだ予言にすぎず，　確認されていない．　近い将来，　2つの予言をチェックするのは技術的に難しいだろう．　といっても，　これに反する証拠もない．

宇宙初期の熱い段階を回避したモデルは，　観測結果を説明するのに成功していない．　しかし，　どんなものでも将来変わる可能性はいつも残されている．
Ref. 229

付け加えるが，　数学的な観点化すると，　観測されている宇宙の物質分布を用い，　やや弱い一般的な仮定をすると，　宇宙は，　有限の過去において，　極めて小さく熱かった時期があったことを避ける方法はない．　この状況を，　もう少し，　詳しく見てみるのは大切である．
Ref. 230

ビッグバンはビッグバンだったか?

まず，　ビッグバンは一種の爆発だったのか?　爆発とは，　何かの物質の内部エネルギーが物質の一部の運動に変換されることを意味する．　しかし，　宇宙の歴史の始まりにこのような過程はなかった．　正しい言い方をすれば，　物質が分かれて運動したのではなく，　時空の膨張である．　膨張のメカニズムと原因は，　私たちの冒険の現時点では，　まだ，　わかっていない．　重要なのは空間の膨張なので，　全現象を爆発と呼ぶことはできない．　さらに，　星間空間には音を運ぶ媒体もなのもないので，　文字通りの「バン」とは言えない．

ビッグバンはビッグだったのか?　約140億年前，　見える宇宙は原子1個よりも小さかった．　つまり，　ビッグバンは，　ビッグでも，　バンでもなかったというのが正しい．

ビッグバンは事象だったのか?

> Quid faciebat deus, antequam faceret caelum et terram? ...Non faciebat aliquid.*
>
> Augustine of Hippo, 告白, XI, 12.

ビッグバンは時空全体に起きたことを表現したものである. 不注意な新聞記事に時々書かれているようなこととは違い, 空間膨張のどの瞬間においても, サイズがゼロであったことはない. つまり, 空間がたった1つの点になることはなかった. わかったふりをして, もっともらしく説明しする人もいるが, 間違っている. ビッグバン理論と言うのは時空の膨張を記述しているだけで, 始まりについて述べているわけではない. 物質の運動を時間的にさかのぼると, 測定誤差の問題は別にして, 一般相対論では初期状態において特異点が存在しうるということが導けるが, これは点状のものが存在するという仮定があっての話である. ところが, この仮定は誤っている. さらに, 高エネルギー密度における一般相対論の非線形効果はまだ完全には明らかになっていない. それにもまして, ビッグバンは全宇宙で起きたのである. (研究者たちは宇宙の様々な側面を説明するために「膨張」を考えている理由はここにある.) つまり, ビッグバンは事象ではない.

一番重要なのは, 密度や温度といった物理的観測量で無限に大きい(無限に小さい) 値に到達したものがないように, 量子論からビッグバンは真の特異点ではなかったことが示されている. このような, 物理量は自然界には存在しない. ** ともかく, 純粋に, 一般相対論だけを基本にした主張では, ビッグバンについての正しい見解を出すことはできないということが, 一般的な意見である. ところが, 多くの新聞記事の主張はこれをやってしまっている.

Vol. VI, page ??

ビッグバンは始まりだったのか?

ビッグバンの前は何だったのかという問いかけは, 北極の北は何かと聞くのと似ている. 北極の北はないのと同様に, ビッグバンの前は無で「あった」. このアナロジーは, ビッグバンは時間の出発点であるという誤解を生じるかもしれないが, これは, 先に述べたように誤っている. しかし, このアナロジーはなかなかよくできている. 量子論では位置の不確定性というものが基本にあるため, 精密な北極も存在しない. ビッグバンについても, これに対応する不確定性がある.

実際, 量子論を用いると, ビッグバンの時またはその近傍では, 時空は定義されないことを数行あれば説明できる. これについての簡単な説明は私たちの冒険の最終巻の最初の章で述べる. 従って, ビッグバンは宇宙の「始まり」と呼ぶことはできない. 宇宙のスケール因子 $a(t)$ がゼロの時は時間はなかった.

Vol. VI, page ??

時空の「始まり」までさかのぼって, 時間と空間の存在について述べるという概念的な誤りに時々出会う. 実際, 量子論によると, ビッグバ

---

* '神が天地を作る前に, 何を行ったか. ...何もしなかった.' ヒッポのアウグスティヌス (Augustine of Hippo) (b. 354 タガステ, d. 430 ヒッポ・レギウス) は反動的で影響のある神学者だった.

** この点について, このような強い主張をすることに慎重な物理学者も多くいる. 私たちの冒険の最後で, この結論にいたる精密な議論を行う.

Vol. VI, page ??

ン近くでは，　事象を順序立てて並べることも，　定義することもできない．単刀直入に言えば，　始まりはない．　最初の事象も特異点もない．

明らかに，　存在している宇宙の「外側」または「前」で，　時間の概念を定義することはできない．　このことは1000年以上前の哲学者もはっきりとそう考えていた．　時間は始まったに違いないとついつい考えたくなる．しかし，　私たちも見てきたように，　論理的な誤りがある．　私たちの登山が始まった時にすでに明らかにしたように，　第一に開始の事象がない．第二に時間は流れない．

Ref. 231

Vol. I, page ??

宇宙にはある「初期条件」があったという考え方の背後にも同様の誤りがある．　初期条件は，　定義により，　物体または場に対して，　つまり，外部から観測できるもの，　または，　ある環境に対してのみ意味がある．宇宙はこの条件に合致しなので，　初期条件を持たない．　しかし，　依然として，　このことを考えようとする人が多くいる．　面白ことに，　何百万部を売り上げたステファン・ホーキング　(Stephen　Hawking)　の本の中で，　，　初期条件のない宇宙について，　他には可能性がないことを述べずに，　魅力的に記述している．　*

Ref. 232

まとめると，　ビッグバンは始まりでもなければ，　始まりも意味しない．このことについては私たちの山登りの最後の部分で考察し何が正しいのかを明らかにする．

Vol. VI, page ??

ビッグバンは創造を意味するのか?

> [一般相対論が作り出すのは] 神とその創造物についての万有懐疑心
>
> ウィッチハンター

創造，　すなわち，　無から何かが生じるためには，　筋の通った空間と時間の考え方が必要である．　そうでないと，　‘出現’　の概念には意味がない．　ところが，　ビッグバンの概念はこの条件を満足していない．　この章で述べる古典的な記述であろうと，　後述する量子力学的な記述であろうとこのことについては変わりない．　現時点において，　その名前となったビッグバンの古典的な記述において，　物質やエネルギーなどの持つ外観的側面は登場しない．　このことは，　以後，　記述を修正しても，　物質が出現前に時間または空間は定義されないのと同じように，　変わらない．

Vol. III, page ??

実際上，　創造についてのすべての性質が欠如している．　創造の　‘瞬間’　もなければ，　無から生じる　‘外観’　もない．　また，　可能性のある組から選択する　‘初期条件’　もない．　この冒険の最後の巻で詳細に述べるが，　可能性のある組から選択する特定の物理　‘法則’　もないのだ．

Vol. VI, page ??

まとめると，　ビッグバンは創造プロセスを含んでおらず，　それを想定もしていない．　ビッグバンは事象でもないし，　始まりでも，　創造でもない．　これらの各3つの結論を受け入れないと，　モーションマウンテン登山は継続できなくなる．　これらを否定するのは信条と偏見の領域にとどまってしまい，　山登りを実質的にあきらめることになる．

Challenge 340 ny

* この記述については物理学者の間で，強い反発を引き起こした．このことについては量子論の節でもっと詳しく述べる．

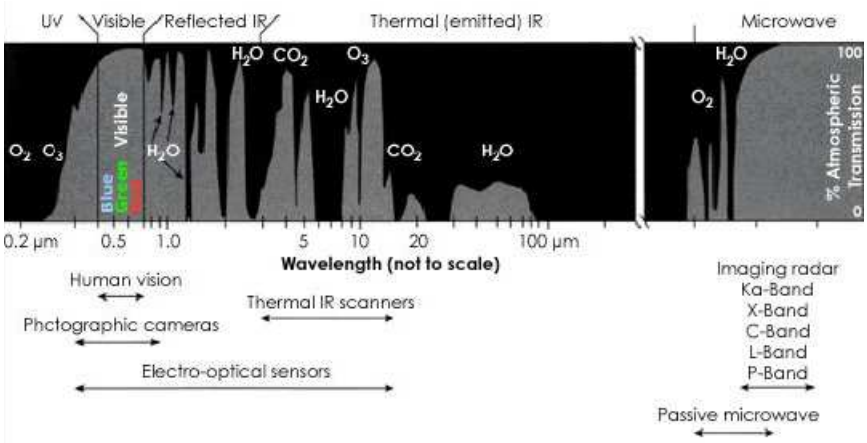


FIGURE 107 大気の透過度 (NASA)

なぜ太陽を見ることができるのか?

まず, 太陽が見えるのは空気が透明だからである. ところが, 空気が透明というのは自明のことではない. 実際, 透明なのは可視光とそれ以外のいくつかの周波数においてだけである. 赤外輻射や紫外輻射はほとんど吸収されてしまう. その理由は, 空気を構成する分子, つまり, 主要なところでは, 窒素, 酸素そしてその他の透明な気体の性質に依っている. 太陽系の惑星や衛星には不透明な大気を持つものもある. 星をながめることのできる私たちは実に幸運なのだ.

実際は, 空気にしても完全に透明ではない. 空気分子は光を少し散乱させる. 空や遠方の山が青く見えたり, 夕日が赤いのはそのためだ. しかし, 私たちの目はこの不透明さを感知できないし, 星は昼光の中で見えない. 可視光から遠く離れた多くの波長で, Figure 107が示すように, 大気は不透明である. (また, 200 nmから短く. ガンマ線にいたるすべての波長領域で空気は不透明である. 長波長域では, 電離層による消失が始まると, 透明な波長域が10から20 mの所に残る. これは, 電離層のによる太陽の活動に依存する.)

太陽は, 多くの熱い物体と同じように, 光を放出している. 私たちが太陽をみることのできる第2の理由がこれである. 白熱と呼ばれるこの効果についての詳細については後で述べる.

Vol. III, page ??

私たちが太陽を見ることができる第3の理由は, 私たち自身やわたしたちの環境, また太陽の周辺が, 太陽と比べて温度が 低いからである. 実際, 白熱物体であっても, 背景の温度が低ければ, その物体を見分けることができる. これは, 白熱光の性質からくるもので, 普通, 黒体輻射と呼んでいる. この輻射は物質に関係しないので, 物体と環境が同じ温度であれば, まったく何も見えない. Figure 108に示すようなオーブンがそれを証明している.

最後の理由は, 太陽がブラックホールでないからだ. もし, そうなら, どんな光も, (ほとんど) 放出できないだろう.

これらの条件は, 当然, 恒星に対してもあてはまる. 例えば, 恒星がみえるのは, 夜空が黒色だからである. それでは, 多色の空をど

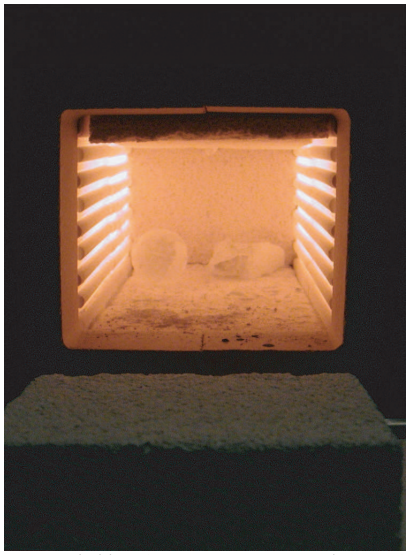


FIGURE 108 赤熱したオーブンでは, 高温のため, 物体とその環境を互いに見分けるのが難しい.
(© Wikimedia)

う説明するか.

なぜ, 恒星の色はちがうのか?

恒星は可視光を出している. そのため, 恒星を見ることができる. 私たちは星の色を決めている重要な効果について調べてきた. 例えば, いろいろの温度をもつ恒星が存在すること, 観測者に対する恒星の相対速度が引き起こすドップラー効果, 重力赤方偏移が挙げられる.

すべての恒星に対し, 黒体の近似がうまく成り立っているわけではないので, 黒体輻射の法則が, いつも, 色を説明していると正確には言えない. しかし, 大部分の恒星は黒体として近似がうまく成り立つ. 星の温度は, 主に, そのサイズ, 質量, 構成物質, 年齢に依存すると, 天文学者は説明している. オリオン座は色付き星座の良い例である. それぞれの星が異なった色を示している. 長時間露出の写真の美しさからこれがわかる.

Vol. III, page ??
Ref. 233
Vol. I, page ??

温度から決定された基本的な色は2つの効果により変化する. 1つは, ドップラー効果による赤方偏移 z で, 光源と観測者間の速度に依存し,

Challenge 341 ny

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{f_S}{f_O} - 1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 \,. \tag{262}$$

の関係がある. このような偏移は, 望遠鏡で観測できるような遠方の微かな恒星に対してのみ重要になる効果である. 裸眼ではドップラー効果は見えない. ドップラー効果は, 遠方の恒星を, 可視領域ではなく赤外領域で輝かせる. 実際, 発光物体として観測されたもので一番ドップラー効果の大きい物は5.0を超え, 退行速度は光速の94 %以上になる. 宇

TABLE 7 恒星の色

型	温度	例	位置	色
O	30 kK	Mintaka	δ Orionis	青紫
O	31(10) kK	Alnitak	ζ Orionis	青紫
B	22(6) kK	Bellatrix	γ Orionis	青
B	26 kK	Saiph	κ Orionis	青白
B	12 kK	Rigel	β Orionis	青白
B	25 kK	Alnilam	ε Orionis	青白
B	17(5) kK	Regulus	α Leonis	青白
A	9.9 kK	Sirius	α Canis Majoris	青白
A	8.6 kK	Megrez	δ Ursae Majoris	白
A	7.6(2) kK	Altair	α Aquilae	黄白
F	7.4(7) kK	Canopus	α Carinae	黄白
F	6.6 kK	Procyon	α Canis Minoris	黄白
G	5.8 kK	Sun	ecliptic	黄
K	3.5(4) kK	Aldebaran	α Tauri	燈
M	2.8(5) kK	Betelgeuse	α Orionis	赤
D	<80 kK	–	–	任意

注意：クラスDの恒星である白色矮星は, 崩壊した恒星の残骸で, サイズは数10キロメートルしかない. 全てが白色ではなく, 黄色や赤色の場合もある. この星はすべての恒星の5パーセントを占めている. 肉眼では見えない. 最後の桁の括弧で温度誤差を表している.
その他の恒星のサイズはすべて独立な変数で, スペクトル型の最後にローマ数字で追加記述されることがある. (Sirius (シリウス) はA1V星, Arcturus (アルクトゥルス) は K2III星.) 巨星や超巨星は, OからMのすべての型に存在する.
褐色矮星を含めるために, 2つの新しい型, Lと T, が提案されている.

宙において, 赤方偏移はスケール因子 $R(t)$ と

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_{\text{emission}})} - 1 \,. \tag{263}$$

で, 関係づけられる. 赤方偏移では 5.0ではの光は宇宙が現在の年齢の1/6の時に放出されたものである.

もう一つの色を変える効果, 重力赤方偏移 z_g は光源の物質質量密度と光放出の起こる半径 R に依存し,

$$z_g = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{f_S}{f_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} - 1 \,. \tag{264}$$

で表せる. 普通, ドップラー偏移より少し小さい. これを示せますか.

Challenge 342 e

赤方偏移を起こす過程は他には知られておらず, さらに言えば, このような他の過程が存在するなら, すでに知られている自然の性質と矛盾することになるだろう. ところで, この色の話題は次の質問につながって

Page 245

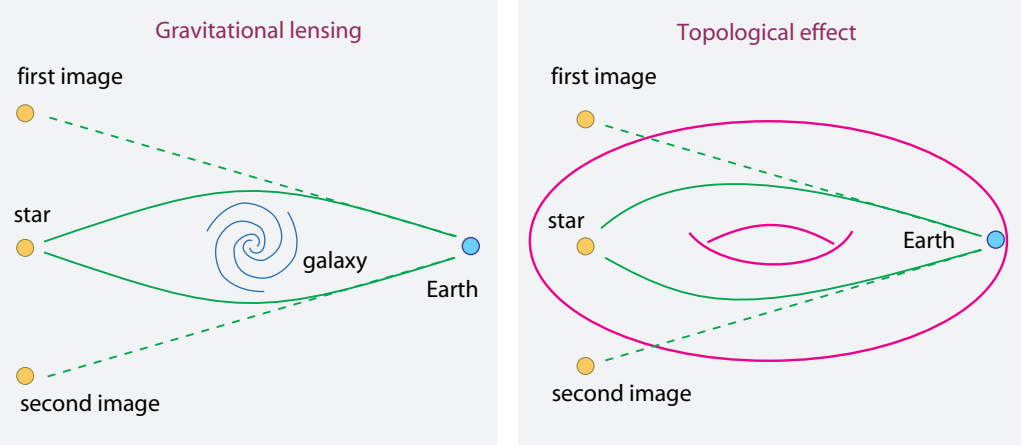


FIGURE 109 Two ways in which1個の恒星が複数の像になっている.

ゆく.

暗い恒星は存在するか?

暗くて見えない恒星が存在するかもしれないのではないか. これは, 背景輻射の最近の測定でわかった大量のダークマターの1つの説明になるかもしれない. 近年, この話題は大きな興味の対象となり, 熱く議論されている. 木星より大きな質量を持ち, 太陽より小さな質量の物体は, ほとんど光を発しない状態で存在することが知られている. 太陽の質量の7.2 %より小さい質量を持つ恒星は褐色矮星と呼ばれ, 融合反応を開始することができない. 現在のところ, 何個ぐらいこのような天体が存在しているかよくわかっていない . いわゆる太陽系外「惑星」の多くはたぶん褐色矮星であろう. この問題の答えはまだ定まっていない.

Page 247 暗い恒星のもう一つの可能性はブラックホールである. これについては後で議論する.

すべての恒星は別のものか? – 重力レンズ

"Per aspera ad astra."*

夜空に見える2個の星は必ず別の星だと自信を持っていえます か. 答えはそうではない. 最近, 2個の「星」が実は同じ天体から 作られた2つの像に過ぎない例が発見された. これは, 2つの像のちらつきを比較することでわかった. 1つの像ともう1つの像のちらつきが, 423日ずれている だけ, まったく同じであった. この結果は, エストニアの

Ref. 234 天文学者Jaan Peltの グループが, iinQ0957+561.というクエーサの2つの像を観測していて発見した.

2つの像は, Figure 109に示す効果, つまり, 重力レンズの結果である. 実際, Peltが観測した2つの像の間には, その星から地球に近い

* '苦難を抜けて栄光の星へ.' 有名なラテン語の格言. しばしば, 誤って'per ardua ad astra'とされることがある.

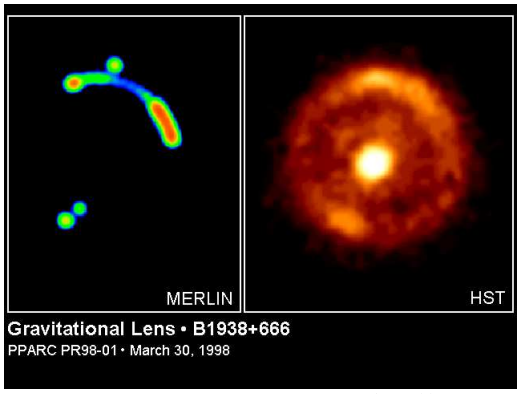


FIGURE 110 Zwicky–Einstein リング B1938+666. 左は電波スペクトル, 右は光学スペクトル. (NASA)

所に, 大きな銀河が観測されている. この効果はアインシュタインによりすでに考えられていたが, 彼はそんなものは観測できないとも信じてもいた. 重力レンズの本当の生みの親はFritz Zwickyで, 1937年, 並んだ恒星ではなく銀河が並んでいると, この効果は普通に起き, 観測も容易であると予言した. 実際, このようなことがあったのだ.

Ref. 235

おもしろいのは, 時間の遅れがわかると, 天文学者はこの観測結果から宇宙のサイズを決定することができる. どうやっておこなうか, 想像できるか.

Challenge 343 ny

2つの質量の大きな観測天体が前後方向に並んでいると, 遠くの天体は近い天体の周りにリングとして見える. このようなリングは実際観測されていて, Figure 110は, B1938+666の前方銀河の周りを取り囲んでいる銀河が美しい例のひとつである. 2005年, 星による重力レンズの例もいくつか見つかった. さらに, 興味深いことは, 2つの星の1つが地球と同程度の質量の惑星である例が3事象あったことだ. 近い将来, 毎晩, 約1億個の星をチェックしている南半球の観測プログラムを利用して, さらに多くの観測結果がもたらされるだろう.

一般的にいって, 近くの天体像はただ一つのものとなるが, 遠くの天体は扱いにくい. 全体的に見て, 1つの天体の場合は, 大したことない. これまで, 約80個の星の像が同定されたことがある. しかし, 銀河全体が, 一度に, 数個の像 (これまで数10という例がある) としてみえる時には, 着手するのがおっくうになる. Figure 111の銀河団CL0024+1654の場合, 近くの黄色い楕円銀河の周りに, 同じ距離にある銀河の7個の細長くのびた青い像が見られる.

しかし, 複数像は重力レンズのみで作られるのではない. 宇宙の形によってもこのような不思議なことが起きる.

宇宙はどんな形をしているのか?

宇宙 の膨張を類推する例としてよく引き合いに出されるのが, 空気を入れ膨らんでゆくゴム風船である. 風船の表面が宇宙の体積に対応していると考えるのだ. 銀河に対応するのが風船の表面の 複数の点で, 風

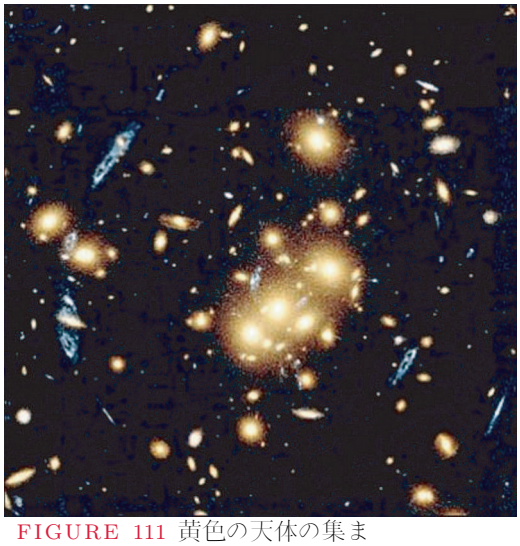


FIGURE 111 黄色の天体の集まりCL0024+1654により作られた1つの銀河の複数の青い像 (NASA)

船が膨らむと点間距離が増加する. 風船は有限だが境界がない. これと類推させることで, 宇宙の体積は有限で, 境界がないことを示唆している. この類推は, 宇宙は, 球にもう1つ次元を追加したものと同じトポロジー, つまり, 同じ'形'を持っていることが前提になっている.

しかし, この類推についての実験的証拠はなんだろう. あまりない. Ref. 236 宇宙の形についてはっきりしたものはない. 単純にその大きさのため, それを決定するのは極めて難しい. 実験によれば, 宇宙の近くの領域, 例えば, 数百万光年内では, そのトポロジーは単連結である. しかし, 距離が大きく離れると, 確かなものはほとんどない. ガンマ線バーストは時間の出現に由来していることから, これらのバーストの研究が, もしかしたら, トポロジーについて何かを教えてくれるかもしれない. * 宇宙背景輻射のゆらぎの研究も何かを教えてくれるかもしれない. これらの研究は始まったばかりだ.

わかっていることがほとんどないので, 可能な答の範囲を示すぐらいしかできない. のべたように, 宇宙の標準モデルでは3つの選択肢がある. 実験と合っている $k = 0$ の場合, 空間のもっとも単純なトポロジーはユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ である. $k = 1$ の時は, 時空は, 普通, 実線のトポロジーを持つ線形時間と球空間 S^3 の積を仮定する. これが, 単連結宇宙に対応し, あり得る可能性の中でもっとも簡単な形である. $k = -1$の場合, 空間の最も簡単な選択肢は双曲多様体 $\boldsymbol{H}^3$ である.

Page 220 さらに, Figure 101は, 宇宙定数の値により, 空間は, 有限で有界にも, 無限で非有界にもなることを示している. 大部分のFriedmann–Lemaîtreの計算では, 単連結性はまったく要求されてなくて, 暗に仮定されている.

* この話は Bob Osserman,により, 数学の観点から語られている. *Poetry of the Universe*, 1996.

時空は，Figure 109の右側に示すように，高次元のトーラスのような多重連結であってもかまわない．トーラスはあらゆるところで $k = 0$ であるが，ノントリビアルな大局的トポロジーを持つ．$k \neq 0$ の場合，時空はもっと複雑なトポロジーになる．* トポロジーがノントリビアルなら，銀河の実際の数は観測されているものよりずっと少ないかもしれない．この状態は万華鏡のようなもので，数個のビーズが非常に多くの像になる．

実際，可能性の範囲は古典物理で示唆されるような単連結や多重連結にとどまらない．量子効果を含めると，さらに多くの選択肢が生じる．これについては私たちの登山の最後の部分で議論する．

Vol. VI, page ??

地平線の向こうは何か?

> 宇宙は広大なところだ. 多分, 最大だ.
> キルゴア・トラウト, 貝殻の上のヴィーナス*l.*

夜空の地平線は扱いにくい代物だ．実際，どの宇宙モデルでも，地平線は私たちから高速で遠ざかっている．詳細な研究によると，物質優位の宇宙では，地平線は私たちから

Challenge 344 ny

$$v_{\text{horizon}} = 3c \,. \tag{265}$$

の速度で遠ざかっている．とんでもない結果ですね．しかし，地平線はどんな信号も運ぶことはないので，これは相対論と矛盾はしない．Ω_K の測定結果でよると，宇宙は本質的に平坦である．そこで，質問．地平線の向こうは何か．

Page 227

宇宙が開いているか境界上にあるなら，私たちが夜見ている物体は，そのまま，一般相対論を適用することで，文字通り，存在する物質の無限に小さい一部にしかすぎないことを予言する．実際，場の方程式を開いている宇宙または境界にある宇宙に適用すると，地平線の向こうには無限の量の物質が存在している．これを確かめることはできるか．

Challenge 345 s

閉じた宇宙では，やはり，地平線の向こうに物質は存在することを予言するが，この場合は有限の量しかない．これを確かめることはできるか．

Challenge 346 s

つまり，宇宙論の標準モデルによると，地平線の向こうには多くの物質がある．多くの宇宙論者同様，私たちも見て見ぬふりをして，後の山歩きにとっておく．この話題の正確な記述はインフレーション仮説で行われる．

なぜ, 星はいたるところにあるのか? – インフレーション

物質の初期状態はなんだったのだろうか．物質はすごい速度で膨張する空間上に一定密度で分布していた．この疑問にとことん取り組んでいる研究

---

* フリードマン–ルメートル計量は, 今述べた単純なトポロジーの等角群による商がどんなものであっても成り立ち, $k = 1$ の場合は二面体空間やレンズ空間に, $k = 0$ の場合には円環に, $k = -1$ の場合には任意の双曲多様体になる.

者がAlan Guthである. これまで, 私たちは, 夜空についての研究, つまり, 宇宙論の基礎として二つの観測原理である等方性と一様性を基礎にしてきた. さらに, 宇宙は (ほとんど) 平坦である. これらの観測結果の根本を理解するために推測されているのがインフレーションである.

宇宙が, 現在, 平坦であるというの奇妙なことである. 平坦な状態というのはフリードマン方程式の不安定解なのだ. 140億年経過して, 宇宙が依然として平坦ということは, ビッグバンの頃は, もっと, 平坦であったにちがいない.

Guthは, 宇宙の歴史の最初の1秒の間に, 宇宙のサイズが指数関数的に増加する局面, いわゆる, インフレーションがあったなら, 宇宙の精密な平坦さ宇宙の, 一様性, 等方性は理解できるだろうと主張した. この約 10^{26} という因子の指数関数的なサイズの増加が宇宙を一様化させたのだろう. このごく短時間の進化は, まだよくわかっていないインフレーション場により推進されたと考えられる. また, インフレーションは宇宙背景輻射の非一様性の成長もうまく説明できるようだ.

しかし, これまで, インフレーションは, これにより解決する問題と同じほどの問題を提起している. Guth自身, この概念を前にすすめるべきかどうか懐疑的になっている. この問題の最終回答はまだでていない.

なぜ, こんなに星は少ないのか? – 宇宙のエネルギーとエントロピーの中身

> Die Energie der Welt ist constant. Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu.*
> ルドルフ・クラウジウス (Rudolph Clausius)

宇宙の物質-エネルギー密度は臨界に近い. 前節で述べたインフレーションは, これとの絡みでうまい説明が可能である. これによると, 星の実際の数は, 極端に高温の時の物質の振舞いと低温になった時に残されたエネルギー密度により決まる. 両者の精密な関係は, いまだに, ホットな研究テーマになっている. しかし, このテーマも上述の引用関して疑問を引き起こしている. 「エントロピー」という用語の発明者ルドルフ・クラウジウス (Rudolph Clausius) がこの有名な言葉を作った時, 彼は正しかったのだろうか. このことについて一般相対論はどういう説明するかを見てみよう.

一般相対論では, 局所エネルギーは定義できないのに対し, 全エネルギーは実際定義できる. 全ての物質と輻射の全エネルギーは運動の定数である. これは, バリオンの部分, 光の部分, ニュートリノの部分に分けられる:

$$E = E_{\mathrm{b}} + E_{\gamma} + E_{\nu} \approx \frac{c^2 M_0}{T_0} + \ldots \approx \frac{c^2}{G} + \ldots . \tag{266}$$

この値を, 地平線の内部だけではなく, 全宇宙にについて積分すると, 一定になる. **

* '宇宙のエネルギーは一定である. エントロピーは最大に向かって増加している.'
** 圧力が無視できる場合は除く.

さらに，　重力エネルギーの項を追加する人も多い．　これをやろうとすると，　その項はそれまでの項とは反対符号になるように定義しなければならない．　このように重力エネルギーをとることで，　多くの人が考えている全エネルギーがゼロの宇宙を創り出せる．　つまり，　星の数はこの関係式により変わってくる．

しかし，　エントロピーの議論が，　これらの当たり前とされてきたことに強い疑問符を付けている．　多くの研究者が宇宙のエントロピーの値を
Ref. 240 探っている．　ある人たちは，　ブラックホールで成り立つ関係式

$$S = \frac{kc^3}{G\hbar}\frac{A}{4} = \frac{kG}{\hbar c} 4\pi M^2 \,, \tag{267}$$

Challenge 347 ny が宇宙にも適用できないかチェックをしている．　これは，　宇宙のすべての物質，　すべての輻射が平均温度により記述できることを仮定している．　これによると，　宇宙のエントロピーは驚くほど小さく，　その背景にはなんらかの秩序原理が存在していることを主張している．　また，　宇宙のエントロピーはどこからもたらされているか，　地平線がその源にならないかと考えている人もいる．　さて，　ここで，　注意すべきことがある．クラウジウスは，　ほとんど疑いもせず，　宇宙は閉じた系であることを仮定し，　そこから，　先に述べた結論がえられていることである．　この過程をチェックしてみよう．　エントロピーは熱い物体から取り出すことのできる最大エネルギーについて表している．　物質の粒子構造が発見されて以降，　エントロピーは特定の巨視的状態を作り上げている微視的状態の数で表現されることが明らかになった．　しかし，　宇宙全体にエントロピーの定義を適用すると，　それは意味をなさない．　宇宙からエネルギーを取り出す方法もないし，　何個の宇宙の微視的状態が集まって巨視的状態にみえるようになっているかも言えない．

こうなってしまう基本的な原因は，　emph状態という概念を宇宙に適用で
Vol. I, page ?? きないからである．　最初，　状態を，　ある系が同じ内部的性質をもつ他の系から区別できる際，　そのある系がもつすべての性質と定義した．　宇宙には，　このような状態の性質は全くないことを，　確認してみてくださ
Challenge 348 s い．

私たちは時空の状態について論ずることができるし，　物質とエネルギーの状態についても論ずることができる．　しかし，　宇宙の状態については論ずることができない．　なぜなら，　その概念が意味をなさないからである．　宇宙に状態がないなら，　宇宙のエントロピーもない．　従って，　エネルギー値もない．　これが，　この問題について引き出せる唯一の正しい結論である．

なぜ, 物質は集合体を作るのか?

私たちは星を見ることができるのは，　宇宙がほとんど空っぽの空間から成っているからである．　別の言い方をすれば，　星は小さく，　お互い遠く離れているからである．　しかし，　なぜ，　こうなっているのだろうか．宇宙の膨張は，　一様な質量分布を用い導出され，　計算された．　それでは，　なぜ，　物質は寄り集まったのだろうか．

一様な質量分布は不安定であることがわかっている. 何らかの理由で, 密度がゆらいだら, 高密度の領域は, 低密度の領域より, より多くの物質をひきつける. 重力は密度の高い領域の密度を増加させ, 低い領域の密度を減らす. ダストで満たされた空間と $a = GM/r^2$ を, 単純に仮定して, 不安定性を示せるか. まとめると, 質量密度に生じたかすかな量子的ゆらぎであっても, 一定の時間が経つと, 物質の集合体ができてくる.

Challenge 349 ny

しかし, 最初の非一様性はどうやってつくられるのだろうか. これは, 現代物理学や天体物理学の大きな問題で, 一般的に受け入れられている答えはまだない. 近代的な実験で, 宇宙背景輻射が角度位置や偏極に対しどうのようなばらつきがあるか測定されている. 数年後には, これらがもたらされ, この問題を解決するような情報が得られるかもしれない.

Ref. 241

星は宇宙と比べると, なぜ, こんなに小さいのか?

物質密度が臨界密度近辺にあるとすると, 物質の大部分を含んでいる星のサイズはそれを構成する素粒子の相互作用の結果である. 後に, 一般相対論 (だけ) では, 自然界にあるどのようなサイズについても説明できないことを示す. この問題は量子論のテーマである.

Page 268

星や銀河は離れているのか, それとも宇宙が膨張しているのか?

空間の膨張と銀河の離散は区別できるのか. 答えは可能である. この答えを見つけ, これを行う方法を説明できるか.

Challenge 350 ny

宇宙の膨張は地球上の空間に対しては適用されない. 膨張は, 一様で等方的な質量分布に対して計算される. 物質は, 銀河の内部にあって, 一様でも等方的でもない. つまり, 宇宙論の原理はここまでくるともはやなりたたない. いままで, 太陽系の様々な場所で, 原子スペクトルを調べる実験的な検証がされたが, 私たちの周りでハッブルの膨張は起きていない.

Ref. 242

宇宙は複数あるのか?

私たちはすべての星を見ているのかどうかという疑問を考える時, 宇宙が‘複数’存在するという考え方もあるかもしれない. しかし, 先に述べたどの宇宙の定義をとっても, それが‘全ての物質-エネルギー’であろうと, ‘すべての物質-エネルギーとすべての時空’であろうと, これに肯定的な答えを見いだせないことがわかる.

Challenge 351 e

この宇宙がすべてでただ一つのものであろうと, この宇宙がすべてではなく宇宙と言えなくても, 複数の宇宙を定義する方法がない. 繰り返し反論がでているが, 量子論でもこの結論は変えられない.

Vol. IV, page ??

多宇宙について述べる人は何を言っているのかよくわからない

なぜ, 星は固定されているのか? – 腕, 星, そしてマッハの原理

> Si les astres étaient immobiles, le temps et l'espace n'existeraient plus.*
>
> モーリス・メーテルリンク.

運動についての議論, 特に, 相対論の進展においては, 人の二本の腕が重要な役割をはたしている. 夜間, 星を見ながら, 腕をだらんとリラックスさせ, 簡単な観察ができる. 急に体を回すと腕は持ち上がる. そうなるときには, いつも, 星が回るように見える. この現象を研究するのに生涯の大部分を費やした人が何人かいる. どうしてだろう.

星と腕はこの運動が, 絶対的でなく, 相対的であることを表している.

Ref. 243 ** この観測は, アインシュタインがマッハの原理と呼んだ2つの定式化につながる.

– 宇宙の中の物質が静止するように慣性系が決定される.

この考えは, 実際は, 一般相対論で実現された.

– 慣性は静止している宇宙との相互作用による.

この考え方にはいろいろ議論がある. このことについて, ある物体の質量は静止宇宙の質量分布に依存することを意味すると解釈する人が多い. これは大きな物体が近くにあると質量に偏りが生じるかどうかを調べる必要があるということだろう. もちろん, この疑問は実験的に調べられている. これには, 単純に, 粒子が異なった方向に加速した時, 同じ質量になるかを測定すればよい. 思った通り, 高い精度で, 非等方性は見つから

Ref. 244 なかった. これにより, 多くの人はマッハの原理は誤りであると結論付けてしまった. 一方, この問題はまだ未解決だと頭をめぐらせている

Ref. 245 人もいる.

しかし, マッハの原理は, 質量を変えることができることを意味しているのではないことは簡単にわかる. そうなら, ガリレオ物理でも, 質量は距離に依存しなければならないだろう. しかし, これは誤っていることがわかっている. 正気の人なら, これに疑いを持つことはないだ

Challenge 352 e ろう.

どの論争でも '慣性' の意味を誤解していることに原因がある. 慣性のことを慣性質量と解釈する人もいれば, (星の下で動かす腕のように) 慣性運動と解釈する人もいる. マッハが非等方質量と距離依存質量のどちらを信じていたのかについての証拠はない. 自分は, 別の人, 多分, 自分より劣った人に惑わされて誤ることはないと自負している人々の例が議論になっているのである. ***

---

* 'もし, 星が動いていないのなら, 時間と空間はもはや存在しないだろう.' モーリス・メーテルリンク (Maurice Maeterlink) (1862–1949) ベルギーの有名な劇作家

** ニュートンや多くの人たちが行ったもともとの推論では, バケツとその中の水の表面を用いているが, 主張していることはどちらも同じである.

*** 有名な例は, 学校で学ぶことがある. コロンブスは地球がまるいと考えていたため馬鹿にされたと, 普通, 言われている. しかし, 彼はそれで馬鹿にされたのではない. 地球のサイズについて意見の相違があったのだ. そして, 実は, 彼を批判する人の方が正しく, 半径を小さく見積もりすぎていた彼の方が誤りだった.

あきらかに, 慣性効果は宇宙の周りの質量分布に依存する. マッハの原理は正しい. マッハは一生の間でいくつか誤りをおかしているが (彼は死ぬまで, 実験結果に反し, 原子の考え方を否定してきたことで有名である.) , マッハの原理についてはそうではない. 残念ながら, コロンブスが愚弄されたように, マッハの原理は正しくないという神話は生き続けると思われる.
Ref. 245

マッハの原理は有用である. たとえば, 私たちの銀河を取り上げてみよう. 実験によれば, この銀河は平らで, 回転している. 太陽はその中心の周りを約2.5億年で回転している. もし, 太陽が銀河の中心を回転していないとしたら, 私たちは約2000万年で中心に落ちてしまうだろう. 前述したように, 私たちの銀河の形から, 他に多くの物質が存在しないといけないという強力な結論を引き出すことができる. つまり, 宇宙には, ほかに, 多くの恒星や銀河がある.
Page 196

宇宙の静止している所

特殊相対論では優先的な座標はない. つまり, 絶対空間はない. 実際の宇宙でも, 同じことが言えるのだろうか. 言えない. つまり, 優先的な座標は存在する. 実際, 標準のビッグバン宇宙論では, 平均の銀河は静止している. ビッグバンについて語っても, 平均の銀河は静止状態を保持していると考えていいだろう. 各銀河は自由落下している. この特別な座標系は背景輻射により実現されている.

言い換えると, 夜空が黒いのは, 背景輻射の中を, 私たちはほとんど速度ゼロで動いているからである. もし, 地球が背景輻射に対し大きな速度を持っていたら, 背景輻射のドップラー効果で, 空は夜でも明るいであろう. つまり, 私たちは背景輻射に対しゆっくり動いているので, 夜空は暗い.

この「ゆっくり」した運動の速度は368 km/sである. (これは太陽の運動速度で, 太陽に対する地球の運動を加味する程度のばらつきはある.) 日常生活レベルで考えると, この速度値は大きなものだが, 光の速度と比べると小さい. さらに詳細な研究でもこの結論は変わらない. 銀河系の運動や宇宙背景輻射に対する局部銀河群の運動は600 km/sのオーダーで, それでも, 光速と比べると小さい. なぜ, 銀河や太陽系が宇宙のなかでこれほど'低'速でうごいているかはすでに調べた. まとめられるか.
Challenge 353 e

ところで, 'universe (宇宙) ' ('uni' (単一の) +'verse' (回転)) という言葉は正しいのだろうか. universeは, 文字通り, 回転するのだろうか. Universeがあらゆることを意味しているのなら, 疑問は意味をなさない. なぜなら, 回転というのは, 宇宙の一部である物体にしか定義できないからである. しかし, 宇宙が'すべての物質'しか意味しないのであれば, 答えは実験で決定できる. この回転は, もしあったとしても, 非常に小さいことがわかっている. 宇宙背景輻射の測定結果では, 宇宙の寿命の間に, 1億分の1回転もできない. つまり, 冗談っぽくいえば, 'universe'は命名を誤っていると言える.
Ref. 246

光は光を引き付けるか?

星を見ることができるのは, その光が私たちに到着するからである. しかし, なぜ, 進行する光線は互いの重力で乱されないのだろうか. 光はエネルギーで, エネルギーは, 重力を通して, 他のエネルギーを引き寄せる. 特に, 光は電磁エネルギーで, すべての電磁エネルギーは重力の支配を受ける. 微小な角をなして進行してゆく2本の光線は, 互いの重力で引き合い, 収束するのだろうか. 遠くの星から眺めると, それは測定でき, 面白い効果を引き起こすかもしれない.

この問題を調べるもっとも簡単な方法は, 次の疑問を考えてみることだ. 平行光線はずっと平行に保たれるか. おもしろいことに, 精密な計算をしてみると, 互いの重力により, 2本の平行光線の径路は変わらないが, 反平行, つまり, 反対方向に平行に進む平行光線の径路は変わる. 光速で進む平行ビームでは, gravitomagnetic成分が, gravitoelectric成分と完全にキャンセルしてしまうからである.

Ref. 247

Challenge 354 ny

光は一緒に進んでいる光を引き付けないので, 光は遠くの星から, 何百万年もかけて私たちの所に到着するまでに自分の重力で乱されることはない. 並んで, 移動している光は, 引き付けることも邪魔しまうこともない. いままでの, 既知のすべての量子力学効果でもこの効果は確認されている.

光は崩壊するのか?

量子論の節で, 光は粒子に崩壊することを示す実験に出くわす. これらの光子は, すでに知られているように, 他の粒子や低周波数の光子に崩壊することがある. 実際に, こんなことが起きてしまうと, 私たちは遠方の星を見ることができなくなってしまう.

しかし, どんな崩壊であっても, 光はその方向を変えるだろう. (なぜか?) , 遠くの物体の像がぼやけさせることがある. さらに, ソ連の物理学者iinnマトベイ・ブロンスタイン (Matvey Bronstein) は, 1930年に, 光崩壊過程は, 小さい周波数をのほうが大きな割合でおきることを示した. 特に有名な21 cmを用いて, 電波シフトをチェックし, 同じ源からくる光のシフ トと比べたところ, 調べた銀河においてはどんな差も検出されなかった.

Challenge 355 e

Ref. 248

物体の色を決めるゾンマーフェルトの微細構造定数を調べたが, 時間による変化はなかった. 最近の誤った主張もあったが, 数十億年の間での変化は検出されていないようである.

Ref. 249

もちろん, 崩壊以外にも, 光はこれまでに未知の何かと衝突したかもしれない. しかし, この可能性は, 同じ理屈で排除される. これらの研究から, ドップラー効果以外の自然界の機構による赤方偏移や重力赤方偏移はないことが示されている.

Challenge 356 ny

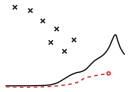
Page 235

夜に星が見えることから, 自然界の多くの性質に光があてられる. 私たちも, 運動の基礎を探し求めて, もっと一般的なテーマを持って登山を続けよう.

宇宙論のまとめ

夜に見えるものを詳しく追及してゆくと，　数々の驚くべきことに遭遇する．第一に，　宇宙は広大だが，　有限サイズである．　第二に宇宙は生まれてから極めて長い時間経過しているが，　有限の年齢である．　第三に宇宙は膨張している．

　もし，　望遠鏡を見る機会があれば，　いや，　ぜひ，　見てください．素晴らしいです．



Chapter 9

ブラックホール – 永遠の落下

> “Qui iacet in terra non habet unde cadat.*”
> Alanus de Insulis

なぜブラックホールを調べるのか

自然界でもっとも極端な重力現象はブラックホールである. ブラックホールは自然界での極限の長さ-質量比を実現している. つまり, その表面, つまり, いわゆる地平線では, 自然界で存在し得る最大の力を作り出す. また, ブラックホールはその質量での最大の時空曲率を作り出す. 言いかえると, ブラックホールは, 自然界で見出されるもっとも極端な一般相対論的な系である. その極端な性質のため, ブラックホールの研究は運動の統一, 運動の最終記述にむけての重要な足がかりにもなる.

ブラックホールは‘gravitationally completely collapsed object (重力的に完全に崩壊した物体)’を手っ取り早く言ったものである. 2世紀ほど前に予言さえていたが, 長い間, 存在するのかどうかはっきりしなかった. 2000年頃, 存在した実験データをもとに, 専門家がほとんどすべての銀河の中心にはブラックホールが存在することを結論付けた. その銀河には, 私たちの銀河も含まれている (Figure 112参照). ブラックホールはクエーサー, 活発な銀河の核, ガンマ線バースト源の中心に存在が疑われている. つまり, 銀河の進化とブラックホールの進化は密接に結びついている. さら, 約10個の小さなブラックホールが私たちの銀河のいたるところに確認されている. こういった理由から, 自然界で最も素晴らしく最も強力な系, ブラックホールは魅力的な研究テーマになっている.

Ref. 135 Ref. 250 Ref. 251

質量集中と地平線

脱出速度とは, ロケットを打ち上げた時, 二度と戻ってくることができないようにするための必要な速度のことである. 脱出速度は, 出発する惑星の質量とサイズに依存する. 惑星の密度が大きければ大きいほど, 脱出速度は大きくなる. 惑星や恒星の脱出速度が光の速度 c より大きくなるとどうなるのだろうか? このような物体を最初に想像したのは英国の地質学者ジョン・ミッチェル (John Michell) で1784年のこと, また, それとは独立に, 1795年にフランスの数学者ピエール・ラプラス (Pierre Laplace) も考えていた. これらは, 一般相対論が作られる

* ‘地上に寝転がっている人は, そこから落ちることはない.’ 作者の実名は Alain de Lille (*c.* 1128–1203).

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

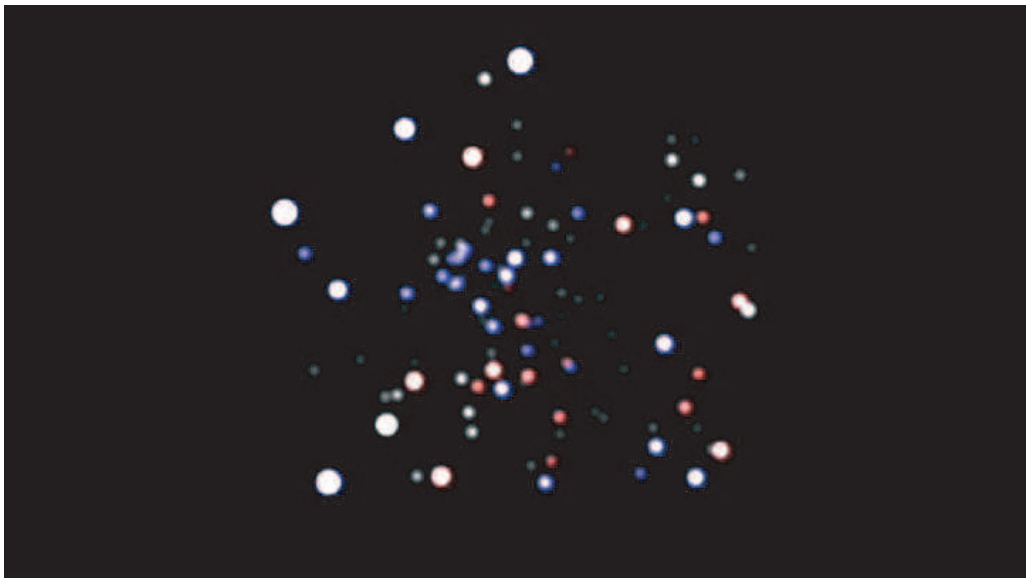


FIGURE 112 私たちの銀河の中心付近の星の軌道変化 (約16年の期間) 中心付近に見えない天体があるが, 非常に質量が大きくサイズが小さいことからおそらくブラックホールと思われる. (QuickTime film © ESO)

ずっと昔のことだった. ミッチェルとラプラスは根本的なことに気が付いていた. たとえ, 大きな脱出速度を持つ物体が熱い星だったとしても, 遠く離れた観測者から見ると, Figure 113に示すように, 完全に黒く見えるだろう. この物体はどんな光もそこからは出てこれないし, 向こう側から来る光も遮蔽されてしまうだろう. 1967年, ジョン・ホイーラーは, * 現在, 標準的に使われているブラックホールという言葉を作り出し, アン・エヴィング (Anne Ewing) のおかげで, 物理の中で有名になった.

半径がシュワルツシルト半径と呼ばれる臨界値より小さい半径の質量 M の物体から, 光は脱出できないことを示すのは, 数行で十分である. Challenge 357 e このシュワルツシルト半径は

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{268}$$

であらわせる. 一般相対論において, 外周値を 2π で割った値を半径とすれば, この公式は万有引力でも一般相対論でも成り立つ. このような物体は, 自然界の長さ-質量比の極限値を実現している. このためや短く表現するために, R_S のことを質量 M のブラックホールのサイズとも呼ぶことにする. (サイズと言っても, 直径の半分しかないことに注意.) 原理的には, 長さ-質量比より小さい物体を想像することは可能である. しかし, 光速より速い物体を観測できないように, シュワルツシルト半径より小さい物体を観測する方法がないことがわかってくる

* ジョン・アーチボルト・ホイーラー (John Archibald Wheeler) (1911–2008), アメリカの物理学者で一般相対論の第一人者. いくつかの素晴らしい教科書も執筆した. その中でも John A. Wheeler, *A Journey into Gravity and Spacetime*, Scientific American Library & Freeman, 1990,は, 数学を使わず, 熱意をもって詳細に一般相対論を説明している.

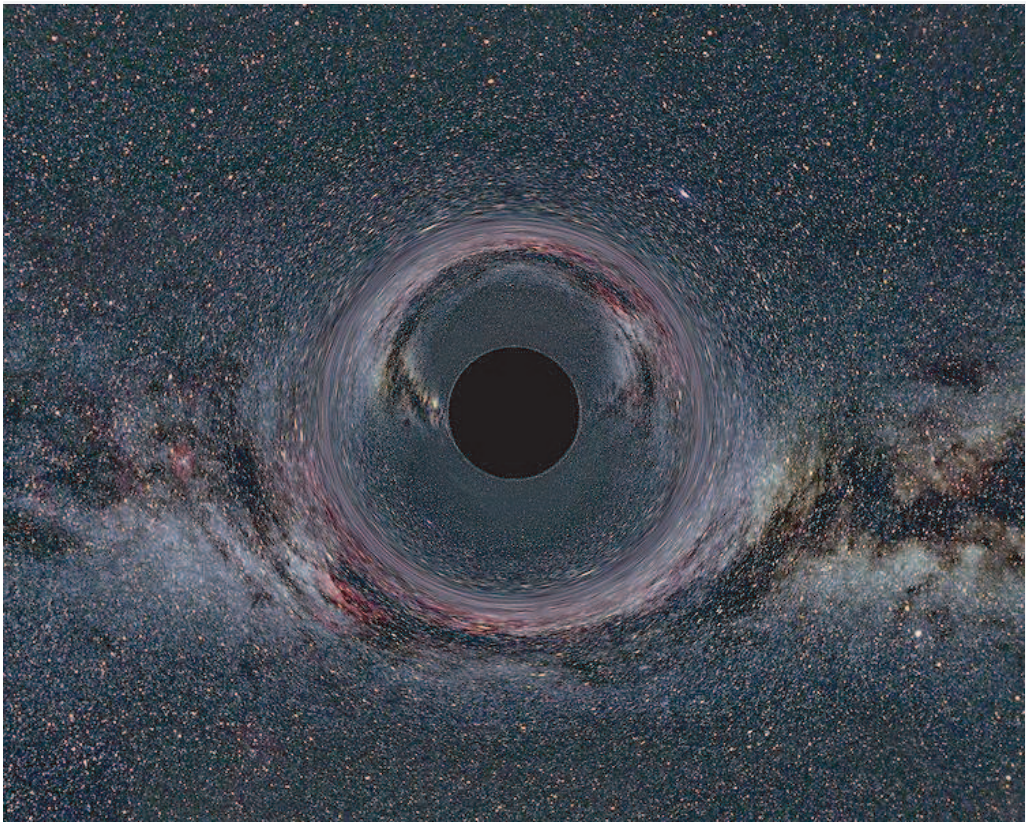


FIGURE 113 600 kmから見た, シュワルツシルト半径が30 km, 10太陽質量のブラックホールが, 背景の中の銀河系をどのように変形させるかを示した単純なシミュレーション画像. ブラックホール半径のほぼ倍の所にできたZwicky–Einsteinリングとそのへり. (画像© Ute Kraus www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de)

だろう. ただ, 極限状態として, 光速で運動する存在を観測できるように, ブラックホールも観測できる.

テスト質量を縮め, 臨界半径 R_S まで近づけると, 二つのことが起きる. まず, (仮想) 点質量の局所固有加速度は際限なく増加する. 有限のサイズをもつ実際の物体に対しては, ブラックホールは自然で可能な最大の力を加えることになる. ブラックホールに落ちるものを引き戻すことはできない. つまり, ブラックホールは落下するすべての物体を呑み込んでしまう. 宇宙電気掃除機みたいなものだ.

ブラックホールの表面での, 遠方の観測者に対する赤方偏移因子も際限なく増加する. 二つの量の比をブラックホールの表面重力といい,

Challenge 358 ny

$$g_{\text{surf}} = \frac{GM}{R_S^2} = \frac{c^4}{4GM} = \frac{c^2}{2R_S} \,. \tag{269}$$

で表せる. ブラックホールはどんな光の放出も許さない.

力の極限と無限の赤方偏移を起こす表面では光, 物質, エネルギーなどあらゆる種類の信号を外界に送ることはできない. つまり, ブラックホールは 地平線に囲まれている. 地平線は限界面である. 実際に,

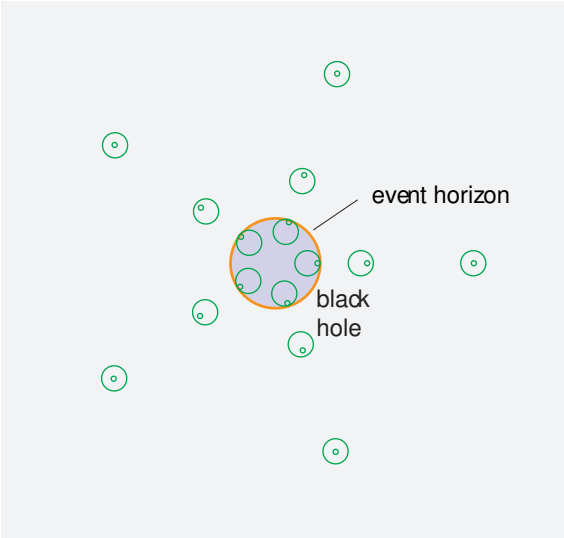


FIGURE 114 非回転ブラックホールの周りの 赤道面の光円錐 赤道面の上部から見ている.

地平線は2つの意味で限界がある. 一つは, 地平線はコミュニケーションを制限する. そこを横切ってコミュニケートすることはできない. もう一つは, 地平線は最大力と最大仕事率が現れる面である. これらの性質を用いると, 地平線でおきる効果についてのすべての疑問に答えることができる. 例えば, 地平線から上向きに光ビームを発射したらどうなるだろうか? 地平線のすぐ上ではどうなるだろうか? Figure 114がヒントを与えてくれる.

Challenge 359 s

天体としてのブラックホールは惑星とは異なるものである. 惑星の形成時, これ以上圧縮できないというところまで物質が寄り集まり, そこで平衡状態が成り立つ. これで惑星の半径が決まることになる. これは地球にむかって石が投げつけられたときに状況は似ている. 石が地面に衝突すると, 石は停止する. 物質が別の物質と衝突した時に, '地面'は形成されるのだ. ブラックホールの場合は, 地面がなく, どんなものでも, 絶えず, 落下する. そのため, ロシア語では, ブラックホールは *collapsars*と呼ばれていた.

ブラックホールのこの連続落下は, 物質の密度が非常に高くなり, 日常生活では普通ありえないような相互作用もすべて通り越した時に起きる. 1939年に, ロバート・オッペンハイマー (Robert Oppenheimer) * とハートランド・スナイダー (Hartland Snyder) は, ある条件を満たす質量を持つ恒星が燃焼を停止した時に, ブラックホールは形成されることを理論的に示した. 条件を満たす質量を持つ恒星が燃焼を停止すると, '床'の支えがなくなり, あらゆるものが際限なく落下を続ける.

Ref. 253

ブラックホールは 永遠の自由落下状態の物質である. その一方で, 外

* Robert Oppenheimer (1904–1967)はアメリカの有名な物理学者. USAの理論物理学の父と呼ぶこともできる. 量子論と原子物理で業績をあげた. この時, 第2次大戦中, 原子核爆弾を開発したチームの指揮をした. 彼はまた, 彼の母国の大きなウィッチハンター組織の有名 (かつ無実の) 犠牲者でもあった. www.nap.edu/readingroom/books/biomems/joppenheimer.html参照のこと.

部の観測者にとって，その半径は一定に保たれている!それだけではない．さらに，永遠の自由落下をしていることから，唯一の熱力学的平衡にある物質である!ある意味，床とかその他，私たちが日常経験する状態というのは準安定状態でしかない．これらの状態はブラックホールほど安定ではない．

限界表面としての地平線

ブラックホールを特徴づける性質は地平線である．私たちが初めて地平線
Page 88
に出会ったのは特殊相対論の加速観測者においてであった．重力による地平線はこの観測者の性質と類似している．最大力と最大仕事率の節でその第一印象を与えておいた．私たちがわかっている相違点は，特殊相対論の場合，重力を無視していることだ．その結果，自然界の地平線は，特殊相対論で存在を仮定している点状仮想観測者の観測意味しているものとは違い，平面ではない．

最大力の原理と場の方程式から，回転対称 (非回転) で，電
Page 135
気的に中性な質量の周りの時空は，

$$\mathrm{d}i^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} - r^2\mathrm{d}\varphi^2/c^2 \,. \tag{270}$$

で表せる．これは，いわゆる，シュワルツシルト計量である．以前に述べたように，r は周長を 2π で割ったものである．また，tは無限遠で測定された時間である．

今，質量は，非常に局在化しているとする．この時，外部の観測者は $r = 2GM/c^2$ 以下の所から発信されたどんな信号も受け取ることはできない．この距離に地平線があり，ブラックホールと呼ばれる状態がある．半径 r の所の観測者の固有時間 i は，無限遠の観測者の時間 t と，

$$\mathrm{d}i = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\,\mathrm{d}t \,, \tag{271}$$

で関係づけられており，地平線の所の観測者の固有時間はゼロになることがわかる．言い換えると，地平線の所では赤方偏移が無限大になる．(もっと正確に言えば，非回転ブラックホールでは，無限大の赤方偏移面と地平線が一致する．回転するブラックホールではこの二つの面は一致しない.) 遠方の観測者にとって，地平線上で起きるあらゆることは，無限にゆっくりになる．つまり，地平線上で起きることを観測している遠方の観測者にとっては，まったくも起きない．

観測者が光速に到達できないのと同様に，観測者は地平線に到達できない．第2の観測者にとっては，第1の観測者がほとんで光速に近い速度で動いていることだけである．同様に，第2の観測者にとっては，第1の観測者は地平線にほとんど到達しているだけである．さらに，旅行者が光速に近づきどう感じているかについては，別の観測者はわからないし，到達不可能な光速をどう経験しているかもわからない．同様に，

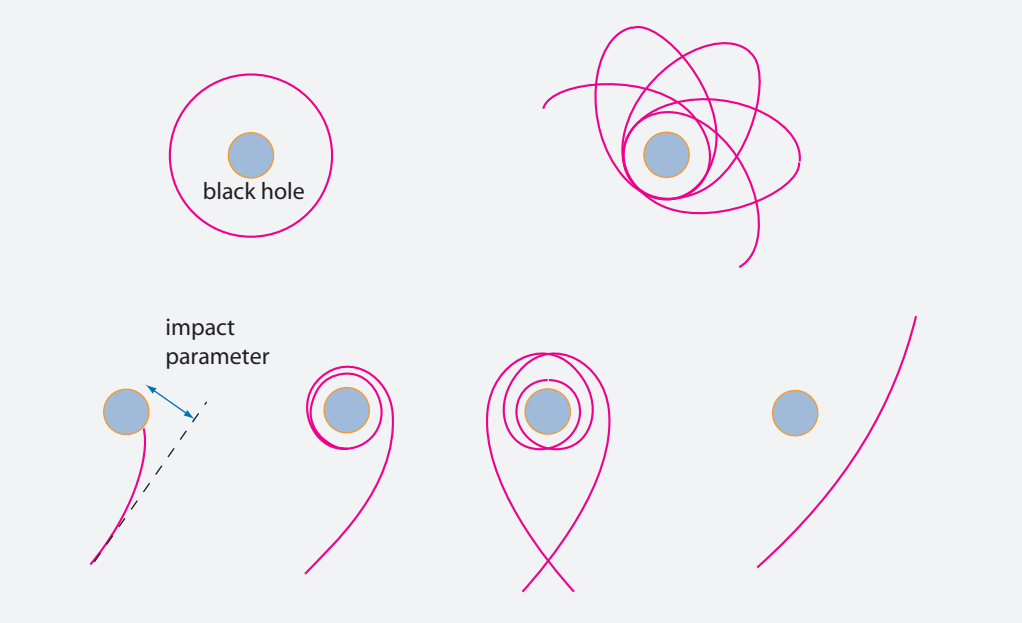


FIGURE 115 非回転ブラックホールの周りでの質量を持つ物体の運動 – 衝突パラメータと初期速度による違い.

(ブラックホール内への) 旅行者が地平線の近くでどう感じるかについて, 別の観測者はわからないし, 到達不可能な地平線をどう経験しているかわからない.

地平線内で起きているも何も言えない. * この見方を突き詰めてゆくと, ブラックホール計量は一種の真空計量になる. この見方によると, 質量は真空から‘作り出される’.

一般相対論では, どんな地平線であっても, ブラックということが示される. ここから, 光は放出されることはないので, 古典的な地平線は完全に暗闇である. 実際, 地平線は想像できるものの中で最も暗い実体物である. 自然界にこれ以上に暗いものは存在しない. しかし, 地平線は完全に黒ではないことをこれから学ぶであろう .

Page 258

ブラックホール周りでの軌道

ブラックホールは時空を強く曲げるため, ブラックホールの近辺を運動する物質は万有引力で予想されるものより複雑な振る舞いをする. 万有引力では, 描く軌道は, 楕円, 放物線, または 双曲線のいずれかで, すべて平面曲線である. 非回転のブラックホール近傍では, 軌道は平面内にとどまることがわかっている. **

非回転ブラックホール, つまり, いわゆるシュワルツシルトブラックホールの周りで, $3R_S/2$ の半径より小さい半径の円軌道は不可能で

* もちろん, 数学者は物理的条件に付いては気にしない. したがって, Martin KruskalやGeorge Szekeresは, ブラックホール内での座標系を定義した. しかし, このような座標系は, 量子論と矛盾することもあり, アカデミックな興味対象としては非現実的である. ブラックホール地平線内の座標系は, 宇宙論の地平線の向こう側と同じ状況である. つまり, 実験的に証明できない, いってみれば, 信念の座標系である.

** このような経路に対して, 遠距離観測者による半径と固有時間を用いると, 平均距離と軌道時

Challenge 361 ny ある. (なぜか示せるか.) また, この半径から$3R_S$までの半径では, 外乱により円軌道は不安定になる. ブラックホールの周りでは楕円軌道は存在しない. それに対応するロゼッタ軌道をFigure 115に示す. このような軌道は有名な近星点シフトを示す.

ブラックホールの周りのポテンシャルは, シュワルツシルト半径の15倍を超える距離あたりから, $1/r$ からのずれはそれほど顕著ではなくなる. 太陽の質量のブラックホールでは, この中心からの距離は42 kmになるだろう, 従って, 太陽の周りの地球の軌道との差はほとんど気付かないだろう.
Challenge 362 e

重力の特徴は潮汐効果であると, 私たちの冒険で何度も説明してきた. ブラックホールはこの点に関し極端な性質を示す. もしダストの雲がブラックホールに落ちてゆくと, 雲のサイズは落下とともに増加し, 雲は全地平線を覆う膜にになる. 実際, この結果は広がりを持つものならどんなものでもこうなる. ブラックホールのこの性質は, 後に, 素粒子のサイズを議論する際に, 重要になる.

無限遠から落下する物体についての, ブラックホール近傍の状況はさらに興味深い. もちろん, 双曲線軌道はなく, 十分遠方を通過する物体に対してのみ, 双曲線に類似した軌道になる. しかし, 小さいけれども, 小さすぎることもない衝突パラメータの場合, 物体は複数回転したのち, 再び, 離れてゆく. 回転数は衝突パラメータが小さくなるとどんどん増えてゆき, 衝突パラメータがある値に到達すると, Figure 115に示すように, 半径 $2R$ の軌道に捕まってしまう. 言い換えると, 入射物体がある臨界角を下回る角度で近づいてくると, 物体はこの軌道に捕獲されてしまう. 比較のため, 万有引力の場合を思い出すと, 捕獲することはできない. さらに, 小さな衝突パラメータの場合, ブラックホールは入射質量を呑み込んでしまう. 捕獲と偏向の両方とも, 物体はブラックホールの周りを複数回回ることがあるが, 万有引力の場合, 物体の周りを半回転以上することはできない.

しかし, もっともとんでもない軌道というものあり, これは万有引力の放物線の場合に対応している. (これは起きる確率がゼロなので, 純粋にアカデミックなおもしろさがあるだけである.) まとめると, 相対論により, 重力による運動は大きく変更される.
Challenge 363 ny

回転するブラックホールの周りでは, 点質量の軌道は, Figure 115で示されるものより, さらに複雑になる. 例えば, 束縛運動の場合, Thirring–Lense効果のため, 楕円軌道は平面内にとどまらず, ブラックホールの周りの空間を満たす三次元軌道になる.

ブラックホールを通過する光の径路はどうなるのだろう. その径路をFigure 116に示す. 高速粒子の場合と定性的な差異はない. 非回転のブラックホールでは, その径路は当然, 単一平面内にある. もちろん, 光が十分近くを通過すると, 径路は大きく曲げられたり, 捕

間を関係づけるケプラー法則

$$\frac{GMt^3}{(2\pi)^2} = r^3 \tag{272}$$

Challenge 360 ny が成り立っている.

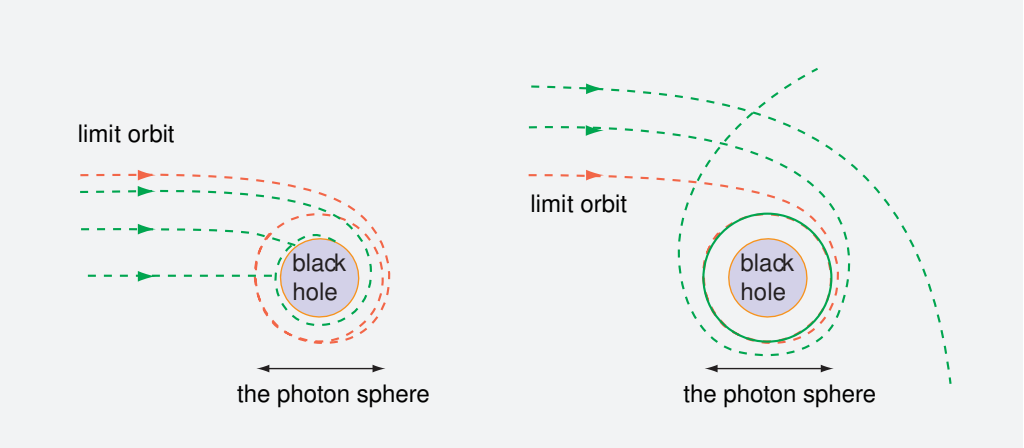


FIGURE 116 非回転ブラックホールの近くを通過する光の運動

獲されたりする. また, 光がブラックホールを離れたり捕獲される前に, その周りを複数回回転することもある. ふたつのケースの境界となるのが, ブラックホールの周りの光の$3R/2$にある円運動の径路である. 私たちがこの軌道上にいるとしたら, 前方を向いているのに頭の後を見ていることになる！しかし, この軌道は不安定である. この円軌道の内部の全ての軌道を含んだものの表面を光子球 *(photon sphere)* とよぶ. つまり, 光子球は無限遠へ至る径路と捕獲に至る径路をわけるものである. ブラックホールの周りの光の軌道には安定なものはないことに注意してください. ブラックホールを回る光においてロゼッタ軌道は存在するか.

Challenge 364 ny

Challenge 365 ny

回転ブラックホール場合, 径路は複雑になる. 赤道面で, 二つの円状の光径路が可能である. ブラックホールと同じ方向に回転する光の径路は小さく, 反対方向に回転する光の径路は大きくなる.

Challenge 366 ny

帯電したブラックホールでは, 落下する帯電粒子の軌道はさらに複雑になる. 電気力線を考慮する必要がある. マイスナー効果の電気版に類似した効果のように, 普通の電磁気学では起きないような面白い効果がいくつか現れる. このような軌道の性質は, 現在でも, 一般相対論の活発な研究分野になっている.

ブラックホールには毛がない

ブラックホールを特徴付けるための量は何なのだろうか. ブラックホールのすべての性質は, ブラックホールの持つ数個の基本量から決まってしまうことがわかっている. その量とは, 質量 M, 角運動量 J, そして電荷 Q である. * サイズ, 形, 色, 磁場といったすべての他の性質はこれらから一義的に決まってしまう. ** 女

* 三つの基本性質の存在は素粒子を思い起こさせる. ブラックホールと素粒子との関係は最終巻でわかるだろう.

Vol. VI, page ??

** 名前を覚えてもらうために, 非回転で電気的中性のブラックホールをシュワルツシルトブラックホールと呼んでいる. 一方, 電荷を帯びず回転をしてブラックホールはカーブラックホールと呼ばれる. これは, 1963年, これに対応するアインシュタインの場の方程式の解を発見したロイ・カー (Roy Kerr) にちなんで, この名前が付けられた. 帯電した非回転のブラックホールは,

性の特徴づけを，その人のサイズ，ウェストや身長から導出するように，ホイーラーは華やかな対応付けを行っている．物理学者はブラックホールには毛がないとも言っている．これは，(古典的な) ブラックホールには他に自由度がないことを意味している．これもホイーラーが言い始めたことだ．* このことは，Israel, Carter, RobinsonとMazurによって証明された．Ref. 256 彼らは，質量，角運動量，電荷が決まると，可能なブラックホールはたった*1*つだけであることを示した．(しかし，Ref. 257 この一意性の定理は，ブラックホールが弱電荷や色電荷などの量子数を持つ場合には，もはや，成り立たない.)

つまり，ブラックホールはどうやって形成されたかとか，その時，どんな物質から構成されていたかには関係しない．ブラックホールはすべて同じ成分を持つ，もっと，正しく言えば，成分はまったく無い．

ブラックホールの質量Mは一般相対論からは制約を受けない．微視的粒子かもしれないし，数百万太陽質量という大きなものかもしれない．しかし，角運動量 J と電荷 Q に対しては状況は違う．回転するブラックホールにはとり得ることのできる最大の角運動量と電荷 (そして磁荷) がある．** 角運動量の制限が入るのは，周長が光速より速く動くことができないためであろう．電荷にも制限がある．Challenge 367 ny 二つの制限は独立ではなく，

$$\left(\frac{J}{cM}\right)^2 + \frac{GQ^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4} \leqslant \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 . \tag{273}$$

の関係がある．この式は，一般相対論の基本である長さ-質量比の限界から生じる．Challenge 368 ny (273) の限界にある回転ブラックホールを臨界ブラックホールと呼ぶ．限界 (273) は一般的なブラックホールの地平線半径が

$$r_\mathrm{h} = \frac{GM}{c^2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{J^2c^2}{M^4G^2} - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 GM^2}}\right) \tag{274}$$

で与えられることを示している．たとえば，太陽の質量と太陽の半分の角運動量，つまり，$2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ および$0.45 \cdot 10^{42}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$ をもつブラックホールの電荷の制限値は約$1.4 \cdot 10^{20}\,\mathrm{C}$ である．

どうやって回転しているブラックホールと非回転のブラックホールを区別するのだろうか．まずは，形である．非回転のブラックホールは球で (どんな非球体要素があっても，重力波として放出されてしまう) Ref. 258 ，回転するブラックホールはやや扁平な形になるはずだが，これは角運動量できまる．その回転のため，静的極限と呼ばれる無限の

ドイツの物理学者Hans Reissnerとフィンランドの物理学者Gunnar Nordströmの名前にちなんで，*Reissner–Nordström* ブラックホールと呼ばれる．帯電し回転しているというブラックホールはカーとノイマンの名前が付いている．Ref. 255

Ref. 135 * ホイーラーは，頭髪の薄い人の見分け方が難しいことに触発されたと言っている．しかし，ファインマン，ルフィーニなどの人たちが，「ブラックホールは，周囲と比べて，毛がない」と言っているときは，明らかに身体的なイメージを描いていたことは，周知のことである．'

Vol. III, page ?? ** 推測された磁荷については後で述べる.. 電荷が現れる式にはすべて，おまけの電荷が入ってくる．

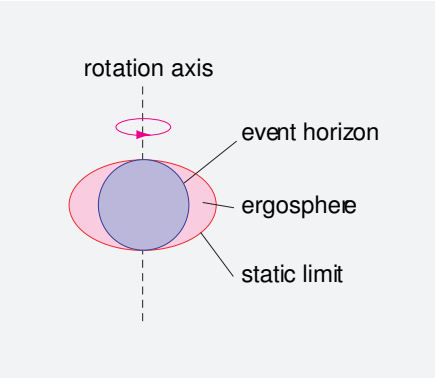


FIGURE 117 回転するブラックホールの作用圏.

重力面, 無限の赤方偏移面は, Figure 117に示すように, (外側の) 地平線とは別のものになっている. これらに挟まれた領域を作用圏 (ergosphere) と呼んでいる. ただ, これは球 (sphere) ではないので, 名前の付け方としては不適切である. (このように呼ばれるのは, あとで簡単に述べるが, ブラックホールからエネルギーを引き出すことができるからである.) 作用圏内の物体の動きはかなり複雑になると考えられる. 回転するブラックホールでは, 内部に落下する物体をブラックホールをまわる軌道に引きずり込むと言えばいいであろう. ここが, 内部に落下する物体を飲み込んでしまう非回転のブラックホールと違う所である. つまり, 回転するブラックホールは実は, 'ホール' ではなく, どちらかといえば, 渦である.

回転ブラックホールと非回転ブラックホールの違いは地平線の面積にも現われてくる. 非回転で電荷を帯びないブラックホールの (地平) 面の面積 A は,

Challenge 369 e

$$A = \frac{16\pi G^2}{c^4} M^2 \,. \tag{275}$$

の式で, 質量と関係づけられる. 回転荷電ブラックホールの表面積と質量の関係はもっと複雑になり,

$$A = \frac{8\pi G^2}{c^4} M^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{J^2 c^2}{M^4 G^2} - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 G M^2}} \right) \tag{276}$$

となる. ここで, J は角運動量で, Q は電荷である. 関係式として

$$A = \frac{8\pi G}{c^2} M r_\mathrm{h} \tag{277}$$

とすれば, すべてのブラックホールで成り立つ. 電荷を帯びたブラックホールの場合, 回転すると, 当然, その周りに磁場が生じる. ここに, 磁場を生じない非回転ブラックホールとの差がでてくる

エネルギー源としてのブラックホール

ブラックホールからエネルギーを取り出すことはできるのだろうか. ロジャー・ペンローズ (Roger Penrose) は, 回転するブラックホールでは, これが可能であることを示した. 作用圏の内部で回転ブラックホールを軌道運動しているロケットがエンジン点火すると, 自分自身のエンジンが発生するものよりとんでもなく大きな速度で外部空間へ飛び出すであろう. 実際, 地球を回るロケットでも同様の効果を利用している. このため, すべての人工衛星は地球と同じ方向に軌道運動している. 反対方向に回ると, もっと多くの燃料が必要であろう. *

Ref. 259

ロケットが得たエネルギーはブラックホールが失ったもので, 従って, その分, 回転速度は遅くなり, 質量も失われる. 一方で, ブラックホールに落ちてゆくガスによる質量増加もあるだろう. この増加は, 回転がゆっくりになることの損失よりいつも大きい, または, 良くて同じである. 最良の方法は, 調度, 地平線上にいるときに, エンジンを点火することである. この時, ブラックホールの地平線の面は一定になっており, 回転速度だけが遅くなる. **

結果的に, 取りうる最大の角運動量で回転している中性のブラックホールでは, 最大エネルギーの$1-1/\sqrt{2}=29.3\,\%$をペンローズ過程を通して引き出すことができる.

Challenge 370 ny

もっとゆっくり回転しているブラックホールでは, この割合は当然小さくなる.

荷電ブラックホールでは, このような不可逆なエネルギー抽出過程も可能性がある.

Challenge 371 ny

どうやってそうなるかわかるか? 式 (273) を用いると, 非回転ブラックホールの質量の50 %までは, その電荷が担うことができる.

Challenge 372 ny

実際, 私たちの冒険の量子の部分で, 自然が時々使っていると思われるエネルギー抽出プロセスについて学ぶだろう.

Vol. V, page ??

ペンローズ過程を用いると, 角運動量や電荷がブラックホールの質量をどのくらい増加させているかがわかる. その結果は有名な質量とエネルギーの関係式

Ref. 260

$$M^2 = \frac{E^2}{c^4} = \left(m_{\text{irr}} + \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 G m_{\text{irr}}}\right)^2 + \frac{J^2}{4m_{\text{irr}}^2}\frac{c^2}{G^2} = \left(m_{\text{irr}} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\rho_{\text{irr}}}\right)^2 + \frac{J^2}{\rho_{\text{irr}}^2}\frac{1}{c^2} \tag{278}$$

で表せる. この式が示すように静電エネルギーとポテンシャルエネルギーがブラックホールの質量に入ってきている. この式で, m_{irr} は

$$m_{\text{irr}}^2 = \frac{A(M, Q=0, J=0)}{16\pi}\frac{c^4}{G^2} = \left(\rho_{\text{irr}}\frac{c^2}{2G}\right)^2 \tag{279}$$

で定義される既約質量で, ρ_{irr} は既約半径である.

* もっと, 危険なのは, どんな小さな物体でも, 流れに逆らった人工衛星に約15.8 km/s challenge でぶつかることになり, その物体自身が非常に危険な飛翔体に変わってしまう. 逆に言えば, 敵の人工衛星を破壊するための仕事率が欲しければ, ナットかボルトを詰め込んだロケットを反対方向の軌道に乗せ, ボルトをばらまいておけばよい. 数十年もすれば敵の人工衛星は利用できなくなるだろう.

** 重力輻射を通して, 回転するブラックホールからエネルギーを取り出すこともできる.

詳細な研究から，ブラックホールの地平線面積，つまりは，換算質量や換算半径を減少させる過程はないことが示されている．これを，可能なあらゆる方法，想像できるあらゆる方法でチェックした．たとえば，二つのブラックホールが融合すると，全面積は増加する．ブラックホールの面積やエネルギーを一定に保つ過程を可逆と呼び，それ以外を不可逆と呼ぶ．ブラックホールの面積は閉鎖系のエントロピーのような振る舞いをする．つまり，減少することはない．1970年に，Jacob Bekensteinは，はじめて，この面積はまさにエントロピーであ
Ref. 261 ると言った．がそれを導出できたのは，エントロピーがブラックホール起源で，そこに落ちるすべての物質のエントロピーがどこに集めれているかがわかったときであった．

ブラックホールのエントロピーは，ブラックホールの質量と角運動量と電荷のみの関数である．エントロピー S は地平線の面積に比例するというBekensteinの導出を自分で確かめたくなったのではないですか．
Challenge 373 ny その後，量子論を用いて，

$$S = \frac{A}{4}\frac{kc^3}{\hbar G} = \frac{A\,k}{4\,l_{\mathrm{Pl}}^2} \,. \tag{280}$$

を見出した．この有名な式は，エントロピーの絶対値や他の観測量が古典物理からだけでは固定できず，量子論なしでは導けない．この式
Vol. V, page ?? については，これからの冒険で議論してゆく．

もしブラックホールがエントロピーを持つなら，温度も持っているに違いな．もし，温度を持っているなら，ブラックホールは輝いているに違いない．ブラックホールはブラックではない！このことは，1974年，ステファン・ホーキング (Stephen Hawking) が極めて複雑な計算を行い示した．しかし，これは，1930年代に，簡単な思考実験で導出されていてもよかったものだ．これについては，後で述べる．
Vol. V, page ?? ブラックホールにエントロピーがなかったら，どんな奇妙なことが起きるかを自答して，調べてみるとおもしろい．さらに，ブラックホール輻射は，エネルギー抽出としては小さい (量子) 現象であるが，非回転の電荷をもたないブラックホールでも起きる．このブラックホール，
Vol. V, page ?? 熱力学そして量子論の間のおもしろい関係は私たちの登山の次回の部分で述
Challenge 374 ny べる．ブラックホールが輝くほかの機構について思いつくか．

ブラックホールの形成と探索

どうなればブラックホールは形成されるのだろう．現時点では，少なくとも，メカニズムとして3種類の可能性が主流である．この問いについては，まだ，盛んに研究が行われている．第一の可能性として，
Ref. 262 ブラックホールは宇宙の初期段階で形成されたというものである．これらの原始ブラックホールは降着，すなわち，近くの物質や輻射を飲み込む過程で生成され，後に説明するメカニズムで消滅していったのではない
Vol. V, page ?? かと考えられている．

観測されているブラックホールのなかで，いわゆる，超大質量ブラックホールは，これまで調べられてきた銀河の中央にある．それの

TABLE 8 ブラックホールの型

ブラックホールの型	質量	電荷	角運動量	実験的証拠
超大質量ブラックホール	10^5 10^{11} , $m_\odot$	不明	不明	近くの恒星の軌道, 降着からの光の放出
中間質量ブラックホール	50 $10^5\,m_\odot$	不明	不明	降着物質からのエックス線放出
恒星ブラックホール	1 $50\,m_\odot$	不明	不明	二重星からのエックス線放出
原始ブラックホール	$1\,m_\odot$以下	不明	不明	これまで未発見. 現在探索中
マイクロブラックホール	1 g 以下	n.a.	n.a.	なし. SFやファンの心の中に登場しているのみ.

典型的な質量は 10^6 から 10^9 太陽質量で, 銀河の質量の約0.5 %になる. 例えば, 私たちの銀河の中心にあるブラックホールの
Ref. 250 質量は太陽の質量の260万倍程度あり, M87銀河の中心のブラックホールは太陽の64億倍の質量をもっている. 超大質量ブラックホールはほとんどすべての銀河に存在し, 銀河自身の形成に関係しているらしい. 超大質量ブラックホールは, 巨大なダストの崩壊で形成され, 引き続き発生した物質の降着により成長したと考えられている. 最近の考えでは, これらのブラックホールは, 初期段階で, 大量の物質を降着し, 落下した物質が多く輻射を放出している. これにより, クエーサの明るさを説明できるかもしれない. その後, 降着の割合は少なくなり, 普通のセイファート銀河が形成された. 銀河の中心の超大質量ブラックホールは星の形成の引き金になっているかもしれない. さらに時間が経つと, 超大質量ブラックホールはほとんど休眠状態になり, 活動を停止する.

一方, 老いた質量の大きな恒星が崩壊すると, ブラックホールが形
Ref. 263 成されるだろう. 太陽の少なくとも3倍位の質量を持つ恒星が燃料を使い果たすと, 残留質量が崩壊しブラックホールになると見積もられている. このような恒星ブラックホールは太陽質量の1倍から100倍程度の質量をもっており, その後, 降着も続くであろう. 1971年に発見されたCygnus
Ref. 250 X-1は, この状態にあり, 最初のブラックホールの候補になった. 太陽質量の4から20倍あるブラックホールが10個以上, 私たちの銀河に散在している. これらはすべて1971年以降に見つかったものである.

最近の測定では, 中間質量ブラックホールの存在も示唆されている. 質量は太陽の1000倍程度だが, 形成のメカニズムも条件も依然として知られていない. 最初の候補が発見されたのは2000年であった. 天文学者は, 星団の中にブラックホールらしきものがどのくらい存在し, どのくらいの頻度で衝突しているかを調べている. ある条件下では, 二つのブラックホールが融合する. その結果がどうであれ, ブラックホールが衝突すると強い重力波が放出される. 実際, この信号を世界中の
Page 169 稼働している重力波検出器で探している.

ブラックホールの探索は, 天体物理学者の間では, ポピュラーなス

ポーツになっている. 原理的には, これを探すもっとも簡単な方法は強い重力場を探すことだ. しかし, 重力場を直接測定出来るのは二重星だけで, いままで, 測定されたものでもっとも強かったのは, 理論的最大値の30 %であった. Ref. 264 別の当然の方法として, 強い重力レンズ探し, ブラックホールに向かう質量サイズ比を求めてみる方法があるが, これまで, この方法でブラックホールが見つかったことはない. ほかには, やはり, 銀河の中央部での恒星の動きを見ることである. この動きを測定し, それが軌道運動をしている中心物体の質量を導くことができる. ブラックホールを探すもっともいい方法は, 人工衛星や気球に搭載した検出器で, 点源からの極端に強いX線放射を探すことである. 物体までの距離がわかれば, 絶対輝度がわかる. 通常の物体では無制限に光を発することはできないので, それがある基準値を超えていれば, ブラックホールに違いない. この方法は, 地平線に消えてゆくエネルギーを直接観測するという目的では, 完璧な方法である. この消失が最近観測されていたかもしれない. Ref. 265

最後に, 小さなブラックホールが銀河のハローの中に見つかる可能性があり, いわゆる, ダークマターの一部を構成しているかもしれない.

まとめとして, 近い将来, ブラックホールの発見についてのリストが膨らむことが期待される.

特異点

様々な初期条件で一般相対論の方程式を解くと, ダストの雲が, 無限大の密度の点, つまり, 特異点に向かって, 普通, 崩壊してゆく. 宇宙の進化を逆向きに辿ってゆくと同じ結論が現れる. 実際, ロジャー・ペンローズ (Roger Penrose) とステファン・ホーキング (Stephen Hawking) は, 多くの古典的な物質の分布の特異点の必要性についての数学的定理をいくつか証明した. これらの定理は時空の連続性とそこにある物質についていくつかの弱い仮定をおいているだけである. Ref. 266 この定理によれば, 宇宙自体のような系の膨張やブラックホール形成のような系の崩壊の際には, それぞれ, 過去と未来のどこかで, 無限の物質密度を持つ事象が存在しないといけない. つまり, この結果は, 宇宙は特異点から始まったという数学的証明があることをいっていると普通まとめられている.

実は, 特異点から始まったとことを導出したその裏には, 物質についての強い仮定が含まれている. つまり, ダスト粒子には固有のサイズがなく, 点粒子であることを仮定している. いいかえると, ダスト粒子が特異点であることを仮定している. この仮定のみから, 始まりと終わりの特異点の存在を導いている. しかし, 最大力の原理は物質の最小サイズの原理として再定式化できることをすでに述べた. 宇宙の最初は特異点であったという主張には欠陥がある. 実験的には明らかである. 宇宙の最初は非常に高温で高密度であったことについては厳然とした証拠がある. しかし, 無限大の温度, または, 密度であったという証拠はない.

数学寄りの研究者は特異点を2つのタイプに分けている. 1つは地平線を持つもので, *dressed*特異点と呼ばれ, もう1つは地平線のない特異点,

つまり，裸の特異点である．裸の特異点は特に奇妙である．例えば，歯ブラシが裸の特異点に落ちてゆくと，あとかたもなく消えてしまう．場の方程式は時間不変性を持つので，裸の特異点は時々歯ブラシを放出する．(dressed特異点はなぜ危険性が少ないか説明できるか?)

Challenge 375 ny

突然の歯ブラシ出現を避けるために，研究者は，何年もの間，裸の特異点の存在を禁止する理論上の原理を見つけようとしている．そのような原理が現在2つあることがわかっている．1つが私たちがこれまで出合った最大力や最大仕事率の原理である．最大力は，自然界には無限大の力が存在しないことを意味し，従って，自然界には裸の特異点は存在しない．これは，宇宙検閲と呼ばれたりすることもある．当然，一般相対論が自然を正しく記述していないとすると，もしかして，裸の特異点は依然として現れるかもしれない．従って，宇宙検閲は，依然，研究対象として議論されている．裸の特異点を実験的に探す試みはまだ成功していない．実際のところ，難しさにおいてはまだましな*dressed*特異点の候補すら見つかっていない．しかし，‘dressed’特異点の理論的論拠も弱い．地平線の向こうにあるものとの相互作用させる方法がないので，何が起きるかという議論は実がない．地平線の向こうに特異点があることの証明もない．Dressed特異点は信念の問題であって，物理の問題ではない．

Ref. 267

特異点を禁止する別の原理もある．つまり，量子論である．無限大の予測値に出会うと，私たちは自然の記述を想像のつかない領域にひろげてきた．特異点について言えば，純粋の一般相対論を非常に小さな距離，非常に高いエネルギーに適用することを想定しなければいけない．前巻ではっきりしたように，自然はこれを許さない．一般相対論と量子論を組み合わせると，‘特異点’についての話も，ブラックホールの地平線の‘内部’で起きることについての話も意味がなくなってしまう．その理由は，任意に小さい時間や空間の値は自然には存在しないからである．

Vol. VI, page ??

Vol. VI, page ??

ブラックホールのついての楽しみとおもしろいチャレンジ問題

> Tiens, les trous noirs. C’est troublant.*
>
> 作者不詳

ブラックホールは多くの直観と反する性質を持っている．量子効果については後にとっておいて，まずは，古典的な効果を見てみよう．

Vol. V, page ??

* *

万有引力では，光はブラックホールの表面から上向きに上昇し，それから，逆方向に落下する．一般相対論ではブラックホールは上ってゆくことはなく，ただ，落下するのみである．これを示せるか?

Challenge 376 ny

* 翻訳不可能

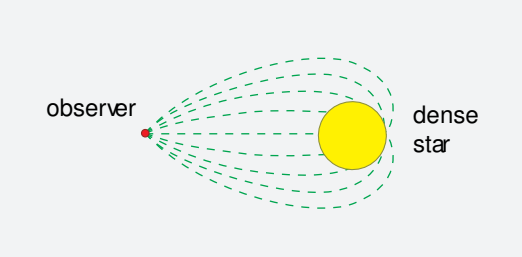


FIGURE 118 密度の高い物体から観測者へ向かう光の運動.

* *

人がブラックホールに落下してゆくと何が起きるか. 外部の観測者は明確に次のように答える. 地平線に到達するまでに無限の時間がかかるので, ブラックホールに到達することはない. これを示せるか? しかし, 落下する人は, 自分自身の時間で, 有限時間内に地平線に到達する. これを, 計算できるか?

Challenge 377 ny

Challenge 378 ny

この結果には驚かされる. 有限の年齢を持つ宇宙の中の外部観測者にとって, ブラックホールが完成してしまうことはないことを意味しているからだ. よくても, せっせと, 系がブラックホールを作っているのを見る程度である. ある意味, ブラックホールは存在しないといってもいいのかもしれない.ブラックホールは時空構造に最初から存在していたのかもしれない. 他方, これはあり得ないことをあとで検証する. つまり, 重要なのは, ブラックホールは極限の概念だが, (浴や温度のような) 極限の概念は自然を記述するのに有用な概念であることを肝に銘じておくことだ. この前の問題とは別に, 自然界では, いつも, 長さ-質量比は,

$$\frac{L}{M} \geqslant \frac{4G}{c^2} \,. \tag{281}$$

を満足している. 例外はない.

* *

おもしろいことに, ブラックホールに落ちてゆく人のサイズは, 落下する人と外で観測する人では, 体験の仕方の様相が大きく異なる. ブラックホールが大きいと, 潮汐効果が小さいので, 落下する観測者は何も感じない. 外の観測者はとんでもない状況を観測する. 落下する人はブラックホールの地平線上全体に広がっているのが見えるのだ. 落下し, 拡がった体が, 地平線を覆う. この事実を, 例えば, 長さ-質量比に対する極限を用いて説明できるか?

Challenge 379 ny

この奇妙な結論は, 私たちの冒険で後々重要になり, 点粒子のサイズについての重要な結論が得られる.

* *

(非回転) ブラックホールの近くの観測者, または, 重力半径の7/4倍より小さい物体の近くの観測者は, Figure 118のように, 物体の完

全に向こう側を見ることができる. その像はどんなものか想像できるか?

Challenge 380 ny Figure 118に示す径路に追加して, 光が観測者に届くまでにブラックホールの周りを何回か回ることがある. 従って, このような観測者はブラックホールのイメージを無限回分見ることになる. 最深部の角度のサイズについての公式はすでに示した.

Page 146

実際, 重力効果により, 任意の球体の半面以上を見ることができる. 普段の生活ではこの効果は小さく, 例えば, 光の曲がりにより見えるのは, 太陽表面は約50.0002 %である.

* *

ブラックホールの $3R/2$ の所にある光の円形軌道の内側にある質点は, 奇妙なことが起きる領域内にあり, 円形内にとどまることができない. 日常生活において, 何か別のものの周りを回る物体は, 外向きに押し出される傾向にある. つまり, 物体の慣性による遠心力効果である. しかし, $3R/2$ より小さいところでは, 慣性により物体は内向きに押される.

Ref. 268 このパラドクス効果を説明する方法はいくつかある. 最も簡単なのは, ブラックホールの近くでは, 重量が遠心力より速く大きくなるという説明である.

Challenge 381 ny 自分でチェックしてみてください. エンジンをオンし, 空に向かって上昇するロケットのみが, ブラックホールの $3R/2$ の所で円軌道をとることができる.

* *

ところで, ブラックホールから信号やエネルギーは放出されないはずなのに,

Challenge 382 s 重力や電場はあらわれるのだろうか?

* *

ホワイトホールは存在するのか. ホワイトホールはブラックホールの時間反転版で, ある境界を越えて, あらゆるものが, 吸い込まれるのではなくて放出される?

Challenge 383 ny

* *

Challenge 384 ny 宇宙定数 Λ を考慮すると, ブラックホールに対する計量は

$$\mathrm{d}\tau^2 = \frac{\mathrm{d}s^2}{c^2} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{c^2 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda c^2}{3}r^2} - \frac{r^2}{c^2}\mathrm{d}\varphi^2 \,. \tag{282}$$

のようになる. r が大きい場合, この計量はミンコフスキー計量にならない. しかし, $1/\sqrt{\Lambda} \gg r \gg 2Gm/c^2$ を満たす r に対し, Λ が小さい場合には, 計量ほとんど平坦になる.

この結果, 逆二乗則も次のように修正される:

$$F = -\frac{Gm}{r^2} + \frac{c^2\Lambda}{6}r \,. \tag{283}$$

現在知られている宇宙定数値を用いると, 第2項目は, 太陽系内部では

無視できるほど小さいことがわかる.

* *

量子論において, 任意の回転する荷電系では, 磁気回転比が重要な量になる. 回転するブラックホールの磁気回転比とはなんだろうか? Challenge 385 ny

* *

大きなブラックホールは, その名の通り, ブラックである. それでも, 見ることはできる. 宇宙船に乗ってそれに向かって進んでゆくと, Figure 113に示すように, うすいハローに似た, ブラックホールの輝く縁取りに気づくだろう. 光子球の距離にあるこのリングは, 他の発光天体からくる光によるもので, ブラック—ホールの周りを周回し, 1回から数回まわったあと, 目に飛び込んでくる. これを示せるか? Challenge 386 s

* *

移動するブラックホールはローレンツ収縮するのだろうか? ブラックホールは少し輝く. 光が観測者の目に届くまでにはブラックホールの周りを何回かまわるので, ブラックホールの作る像は, 実際に, 複雑になる. さらに, 観測者は遠く離れているので, 曲率の効果は小さい. すべてのこれらの効果を考慮すると, この質問はなかなか微妙である. その理由は, 収縮していない状況との比較を正確に定義するのが難しいので, ローレンツ短縮という考え方は意味をなさないからである. Challenge 387 ny

* *

ブラックホールは空間, または, 物質のどちらから作られているのか. 両方の答えも正しい！説明できるか? Challenge 388 s

* *

仕事率とはエネルギーの時間変化である. 一般相対論は仕事率値を $P \leqslant c^5/4G$ に制限する. 言い換えると, 自然界のどんなエンジンも $0.92 \cdot 10^{52}$ Wつまり, $1.2 \cdot 10^{49}$馬力以上の出力を出すことができない. ブラックホールもこの制限値を満足していることをしめせるか? Challenge 389 e

* *

ブラックホールは, Jürgen Ehlersが指摘しているように, 量子論のような微視的領域では, 問題が生じる. 量子論は点粒子に対してつくられていて, 点粒子は時間的世界線上を動く. しかし, 一般相対論によると, 点粒子は地平線内部で特異点を持つので, 特異点はいつも空間的世界線上を動く. 従って, 微視的なブラックホールは, 巨視的なブラックホールとは異なり, 量子論と矛盾する.

ブラックホールについてのまとめ

ブラックホールは永久自由落下の物体である. つまり, ブラックホールは非常に曲がった空間である. ブラックホールは地平線を横切って定義

されるので，物質系の極限と見ることもできるし，曲がった空っぽの空間と見ることもできる．

ブラックホールは最大力を実現している．ある，質量値に対し，ブラックホールは最大密度，最大の黒さ，最大のエントロピーも実現している．ブラックホールは，物質や光を，独特の方法で，曲げ，補足し，放出する．

クイズ – 宇宙はブラックホールか．

私たちはブラックホールの中で生活している可能性はあるのだろうか．宇宙にもブラックホールにも地平線がある．おもしろいことに，宇宙の地平線距離 r_0 は約

$$r_0 \approx 3ct_0 \approx 4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{m} \tag{284}$$

で，そこに含まれる物質の量は

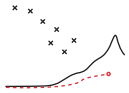
$$m_0 \approx \frac{4\pi}{3}\rho_o r_0^3 \quad \text{whence} \quad \frac{2Gm_0}{c^2} = 72\pi G\rho_0 c t_0^3 = 6 \cdot 10^{26}\,\mathrm{m} \tag{285}$$

ここで，密度$3 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg/m^3}$を使用した．これから，

$$r_0 \approx \frac{2Gm_0}{c^2}\,, \tag{286}$$

となるが，この値はブラックホールの関係式 $r_S = 2Gm/c^2$ と似ている．これは偶然だろうか．いや，そうではない．大きな曲率をもつ系はすべて，多少なりとも，この関係に従う．そうなると，私たちは大きなブラックホールに落下しているのだろうか．この回答は自分で見つけてください．

Challenge 390 s



Chapter 10

空間と時間は違うのか?

> “Tempori parce.*”
>
> Seneca

時間は私たちの主人であると, よく耳にする. 空間についてはそんなことを言う人はいない. 日常生活においては時間と空間はまったく別のものである. しかし, 一般相対論で, その差はなんだろう. 時間と空間は必要なのだろうか. 私たちの冒険において, この疑問は考える価値がある.

私たちは曲率変数の (擬リーマン) 時空で生活をしていると, 一般相対論は述べている. 曲率は観測可能量で, 物質やエネルギーの分布や運動と関係している. その正確な関連性は場の方程式で記述されている. しかし, 根本的な問題がある.

一般相対論の方程式は, 座標 x_0, x_1, x_2 および x_3 を混ぜるような多くの変換下で不変である. 例えば, 視点の転換

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 + x_1 \\ x'_1 &= -x_0 + x_1 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned} \tag{287}$$

が一般相対論では許され, 場の方程式を不変に保つ. 微分同相写像不変である変換の他の例を探してみてください.

Challenge 391 e

時間と空間を混ぜるような視点の変換を行うと, 日常生活とまったく相反するような結果を導く. 微分同相写像不変では, 一般相対論の中ではで空間と時間を弁別することができない. もっと有体にいえば, いままでやってきたように, 座標 x_0 を単純に物理的時間 t とすることができない. これが可能なのは特殊相対論だけである. 特殊相対論では, 時空のローレンツ (またはポアンカレ) 変換が, エネルギー, 線形運動量, 角運動量を基本的な観測可能量として抜き出す. 一般相対論では, (自明なものを除くと) 計量の等長群がない. その結果, その保存性により抜き出される基本的な観測可能量がない. しかし, 不変量にはコミニュケーションが必要である. 私たちが話し合えるのは, 私たちが近似的に平坦な時空に住んでいるからであって, も

* ‘時間について注意を払いましょう.’ Lucius Annaeus Seneca (*c.* 4 BCE–65), *Epistolae* 14, 94, 28.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

し, 三角形の内角の和が π (2直角) でなかったら, 不変量はなくなり, 私たちは対話不能になるだろう.

私たちは, これまで, どうやってこの問題に触れずれにこられたのだろうか. いいろんな方法でこれを行ってきた. 一番簡単な方法は, 考えている状態のある部分で, 時空として, 普通の平坦なミンコフスキー時空を要求することだった. こうすれば, x_0 は t とみなせる. この要求は, 球質量の回りで行ったようにして無限の位置や, 重力輻射やその他の摂動計算を行ったようにしてゼロ次の近似において満足させられる. このようにすれば, 座標が自由に混じりあうのを防ぐことができ, 見つからない 不変量が期待通りに現れてくる. この実用的なアプローチが, 問題解決の普通の方法である. 実際, 普通の優れた一般相対論の教科書でも, 深入りせず, この方法を利用している.

Ref. 224

これをうまくやるためによく行う手法は, 物質やその性質, 輻射, 測定方法を導入する計算に, 空間と時間の違いを, ‘忍び込ませる’ことである. 物質の物性, たとえば, その熱力学状態方程式では, いつも, 空間と時間を区別しているし, 輻射についても, その伝播のところで同じことをしている. これは, 時計と物差しとよぶ輻射と物質という特別な組み合わせに対してもなりたつ. 物質でも輻射でも, 単に時間と空間を存在させることで, それらを区別している.

もう少し, 詳しく見てみると, 空間と時間を区別するために物質を導入するやり方は, ある意味, ミンコフスキー時空を導入するやり方と似ている. 物質のすべての性質は平坦な時空記述を用いて定義している. *

これをうまくやるためのもう一つ手は, 宇宙論の時間座標を用いる方法である. 等方的で一様な宇宙では, それに適した時間座標がある.

Page 215

つまり, 宇宙の過去と未来の年表で使用される座標である. この方法は時間と空間の組み合わせになっている.

Vol. III, page ??

ここで, 私たちはある問題に直面する. 私たちが行いたいのは, 実質的な計算だけではなく, 運動を原理的に理解したいのである. 私たちが欲しいのは根本的な答であって, 実質的な答ではない. だから, これに対し, どうすれば位置 x_i と時間 t を関連付けられるか, どうすれば不変量を定義できるかを知る必要がある. この疑問を考えるには, 前もって, 重力と量子論を結びつける必要があるが, これは, 私たちの冒険の最後の部分の目的である.

問題に対する基本的な解を得るには, 考えている系も一緒にした時計を記述し, どうやって, 時計の読みtを, 系の時空内での振る舞いと関係づけるかを導くことが必要である. しかし, 系を記述するには, 例えば, 初期条件を決めるような測定が必要である. そして, 初期条件には空間と時間が必要である. 私たちは, ここで, 堂々巡りに入ってしう. これこそ, 最初, 避けたいと思っていたことだ.

---

* ここで驚くべきことについて注意しておく. 近距離での条件 (物質の記述) を適用すると, 無限大 (漸近的ミンコフスキー空間) での条件と同じような効果がある. これは, 単なる偶然か. 私たちの冒険の最後の部分でこのトピックに戻る予定である.

Challenge 392 ny

Vol. VI, page ??

ある疑念が生じている. 本当に, 空間と時間に基本的な違いはあるのだろうか. この答えを求めて, あちこち尋ねてみよう.

空間と時間は測定できるのか?

空間と時間を区別するには, それらが測定できなければならない. しかし, 万有引力の節で, 重力効果を用いて, 長さ, 時間と質量を別々に測定することはできないことを述べた. 一般相対論において, この状況は変わるのか. 長さと時間は光速で, そして, 長さと質量は重力定数で結びついている. この結びつきについてはともかくとして, この問題が主張することをまずは理解しておこう.

Vol. I, page ??

これを解明するには電気力学が必要である. 長さのスケールを作るには素電荷 e を用いる. その最も簡単なものは,

Ref. 270

$$l_{\text{emscale}} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{G}}{c^2} \approx 1.4 \cdot 10^{-36}\,\text{m} \,. \tag{288}$$

である. ここで, ε_0 は自由空間の誘電率である. その一方で, 量子力学でも, 量子作用子 $\hbar$ を使用して, 長さのスケールを作ることができる;

Vol. III, page ??

$$l_{\text{qtscale}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.6 \cdot 10^{-35}\,\text{m} \,, \tag{289}$$

これをプランク長とよぶ. しかし, $\hbar$ の長さを測定するのに電磁力学が必要なので, これでは議論は変わらない. 二つの主張が同等であるのは, 素電荷eを自然の基本定数を組み合わせて書き換えることで示せる;

$$e = \sqrt{4\pi\varepsilon_0 c\hbar\alpha} \,. \tag{290}$$

ここで, $\alpha \approx 1/137.06$ は微細構造定数で, 電磁気の強度を表す定数である. αを用いると, 式 (288) は,

$$l_{\text{scale}} = \sqrt{\frac{\alpha\hbar G}{c^3}} = \sqrt{\alpha}\, l_{\text{Pl}} \,. \tag{291}$$

となる. つまり, どんな, 長さの測定でも, 電磁気の結合定数 α とプランク長を基本にしている. 同様のことが, 時間や質量の測定についてもいえる. つまり, 重力または一般相対論それだけで, 長さ, 時間と質量を定義したり, 測定する方法はない. *

Challenge 393 e

この驚くべき結果を与えて, 一般相対論で時間と空間が本当に必要なのかどうかを問うてみよう.

Ref. 271

* かつて, John Wheelerは, 幾何力学時計がこれの反証であるといったことがある. この時計は2枚の平行鏡の間を光を往復させて時間を測定する装置である. しかしこの反証は誤りであった. これを示せるか.

Challenge 394 s

空間と時間は必要か?

Robert Gerochはこの疑問に対し, 5ページの美しい記事のなかで答えを与えている. 彼は, 物理的に観測可能な量だけを出発点にして, 空間と時間を用いずどうやって一般相対論をどう定式化するかについて説明している.

Ref. 272

すべての観測可能な量の組から出発する. その中に1つの注目する量vがある. その観測量のみが, 任意の2つの観測可能量a_1とa_2に対し, 以下の関係を満たす第3の観測量a_3の存在を許す;

$$(a_3 - v) = (a_1 - v) + (a_2 - v)\,. \tag{292}$$

このような観測量を真空と呼ぶ. Gerochはこのような観測可能量をどのように利用すれば, 観測可能量の微分を構築できるかを示した. 彼は, 一般相対論を作っている, いわゆるアインシュタイン代数構築した.

一般相対論では, 普通, 3段階で運動方程式を導出する. まず, 観測可能な物質から時空を作り, 次に, 時空の時間的進展を計算し, その時空の変化から物質の運動を導出する. Gerochの方法では, 真ん中のステップ, つまり, 空間と時間の使用が不要になる.

最大力の原理は, 間接的に, 同じことを主張している. 一般相対論は力と仕事率の極限値の存在から導くことができる. 時空というのは, この原理を現実の観測者の結果に移行するためのツールでしかない.

つまり, 時空をもちいることなしに一般相対論を定式化することは可能である. 時間も空間も不要なので, 両者に基本的差異があるとは考えられない. 一方で, よく知られている差が一つある.

閉じた時間的曲線は存在するか?

少なくともある領域で, 時間座標がトーラスのようにふるまうことはあるのだろうか. 歩行の場合, 出発点に戻ることができる. 時間的に出発した地点に戻ることは可能か. この疑問は詳細に調べられてきた. HawkingやEllisの教科書が, よく参照される. 彼らは時空に要求される性質を列挙し, それが共通のものか, 単独のものかを説明している. たとえば, なめらかで, 大域的に双曲形で, 方向性があり, 時間的な時空は, このような曲線をもたない. 観測されている宇宙はこれらの性質を持っているので, 閉じた時間的曲線を観測しそうにない. 実際, このような候補は今まで示唆されていない. 後に, 微視的スケールでこのような曲線を探すが, 自然界では, これに該当する例は見つかっていないことがわかるだろう.

Vol. V, page ??

閉じた時間的曲線が存在しないことは空間と時間に差があることを示している. しかし, この差は見かけのものにすぎない. これらはすべて物質の振る舞いを基本にしている. この議論は, 最初から, 空間と時間の特定の差を仮定してしまっている. つまり, この調べ方では時間と空間に差があるかを決める役には立たない. 別の方法でこれを調べてみよう.

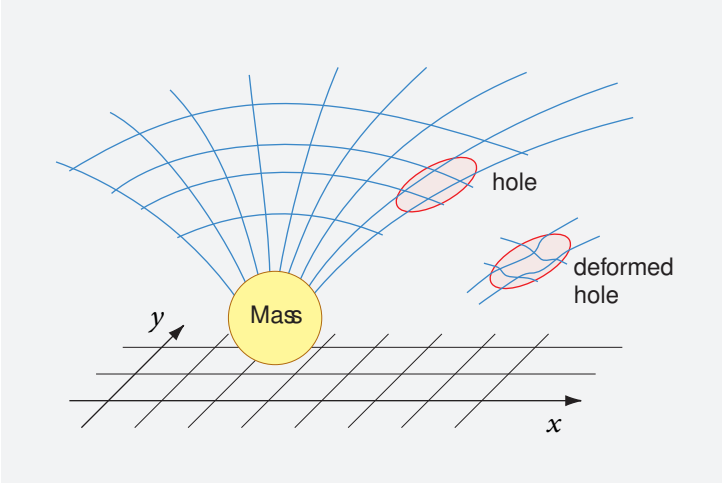


FIGURE 119 空間の「空洞」の概念図

一般相対論は局所的か? – 空洞論

アルバートアインシュタイン が一般相対論を作り上げたとき, 微分同相写像の不変性でかなり頭を悩ませていた. もっとも驚くのが, 有名なのが空洞論, 正しくは, 空洞パラドクスである. Figure 119のように, 質量が, その周辺の時空を変形させている場合を考えてみよう. アインシュタインは真空の小さな領域, つまり, 空洞を想像し, 小さな楕円で表した. 図のはめ込みにあるように, 空洞の内側の曲率が何らかの理由で変化し, 外側では状況が変わらないようなことがおきたら, どうなるだろうか.

Ref. 273

新しい状況は, 空洞の内部で曲率が異なっているので, もとの状況とは物理的に異なっているはずである. この差は, 領域の外側の曲率が内側の曲率を決めているのではないことを意味している. これは全く納得がゆかない. さらに, 悪いことには, この操作を時間領域にまで一般化すると, 物理学における悪夢を見ることになりそうである. つまり, 決定論が失われてしまう.

その一方で, 一般相対論は微分同相写像に対し不変である. 図に示すような変形は微分同相写像である. そのため, 新しい状況というのは, もとの状況と物理的に不変である.

どちらの説明が正しいのであろうか. アインシュタインは, 最初, 第1の見方を好み, 約1年にわたり, 微分同相写像不変の考えをすべて中断していた. 第2の予想が正しく, 第1の考え方は誤っていると理解したのは後になってからである. 第1の考えでは, 図に示すように, 座標軸 x と y が独立に存在することを仮定している. しかし, 空洞ができる間に, 座標 x と y も自動的に変化するのだ. その結果, 二つの状況の間には物理的な差はない.

この話の教訓は時空と重力場の間には差がないということだ. アインシュタインが考えたように, 時空というのは場の一つの性質であり, 図が示すような切り離された存在ではない. 座標は物理的な意味を持っ

FIGURE 120 空洞地球モデル (© Helmut Diehl)

てはいない. 時間と空間における距離 (間隔) のみが意味を持つ. 特に, 微分同相写像不変から, 時間の流れはないことが示される. 空間同様, 時間は関連性を示すだけのものである. 時間と空間は相対的であり, 絶対的なものではない.

空間と時間の相対性から実際的な結論が引き出される. 例えば, 一見すると完全に違うように見えても, 一般相対論の問題は, 実はシュワルツシルトの場合と同じであるということが多くある. 結果的に, 研究者は, 新しい未知の解を見つけたと考えて, シュワルツシルト解を「発見」した (もちろん違う座標系で) ことが20回以上ある. さて, 微分同相写像不変の驚くべき結果を議論する.

地球は空洞か?

> 靴をみると, 私たちは球の内側で生活していることがわかる. そのかかとは端っこの方で擦り切れ, その中間はほとんど擦り切れていない.
>
> 作者不詳

The 地球空洞仮説, つまり, 私たちは球の内側で暮らしているという仮説は, 1900年頃, 秘密グループ内でもてはやされ, 現在でも, 特に, イギリス, ドイツやアメリカの変わった人たちの間で, 依然残っている. 彼らは, Figure 120に図示するように, 固体の地球が, 月, 太陽, 星を含んだ空を囲んでいると主張する. 私たちのほとんどは, 教育によりだまされて, 誤った説明に導かれている. なぜなら, 私たちは, 光は直進すると信じるよう育てられているからだ. 彼らはこう言う. このような説を捨てなさい. そうすれば, 空洞の地球が栄光に輝いて現れる.

Vol. I, page ??

おもしろいことに, この推論は一部当たっている. 宇宙をこのように記述したとしても, 誤りを証明する方法はない. 実際, オーストリアの偉大な物理学者Roman Sexlは, 一般相対論の微分同相写像不変性は二つの見方が同じであることを表しているとかつて言ったことがある. 二つのグループのどちらかが相手に向かって, 自分の方の記述だけが正しいと述べ始めるとおもしろくなる. このような議論は誤っていることをチェックしてみてください. このような変人の肩を持って, 友達に対し空洞地球仮説の擁護をしてみるのもおもしろいかもしれない.

Challenge 395 e 昼と夜, 地平線, 地球の衛星の像の出現について説明するのは簡単だ. 月への飛行中に起きることを説明するのも簡単だ. このようにして, 多くの程度の低い物理学者を狂信者に追い込める. 普通の記述と空洞地球の記述は全く等価である. 量子論においても, 自然に長さのスケールを持ち込むことで, この状況がかわらないことを示せるか.

Challenge 396 s

このような研究から, 微分同相写像の不変性は鵜呑みにできるほど簡単なものではないことが示される. しかし, 残りの冒険で驚きが倍加するよう, 今はそれに慣れてしまうのが最良である. 実際, 私たちの山歩きの最後の部分で, 空洞地球から標準の見方に視点を変えるのと同じくらい大きな対称性が自然にはあることに気が付くだろう. この対称性, 時空の二重性は, 地球の中心から測った距離だけではなく, 自然界の任意の点からの測った距離に対しても成り立つ.

Vol. VI, page ??

まとめ: 空間, 時間, 質量は独立か

この短い議論から, 一般相対論では空間と時間の間には基本的な差はないことが結論付けられる. 唯一あるとすれば, 物質, 輻射や無限での時空といった実際的なものを使用するところである.

Vol. I, page ?? 山登りの始めに, 空間と時間を定義するには, 物質が必要であることがわかった. 今, 空間と時間の間の違いを区別するにも物質が必要であることがわかってきた. また, 山登りの最初に, 物質を定義するには時間と空間が必要であることを理解した. 今, 私たち

Vol. I, page 188 は, それを定義するのに, 平坦な時空が必要であることこともわかってきた. これらの基本的なことの中には, ガリレオ物理の結果を修正するようなことは何もない.

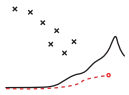
私たちの冒険の残りの部分で, 空間と時間を区別するために物質が必

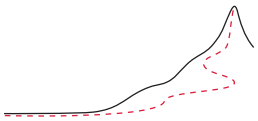
Vol. IV, page ?? 要であることを, 量子物理により説明する. 原理的には, 物質がないと, 空間と時間の違いはあり得ない. そして, 私たちの冒険の最後で, 自然界においては, 質量と時空は同じ基盤上にあることがわかる. 片方はもう一方で定義されるので, 粒子と真空は同

Vol. VI, page ?? じものから作られていることを導出する. 空間と時間の差異は, 日常の低いエネルギー状態において生じるだけであって, このような違いは, 原理的には存在していないことがわかってくるだろう.

まとめると, 一般相対論は, ガリレイ物理で発見された堂々巡りの根拠から脱する手立てを与えない. 実際上は, 一般相対論は, 問題をそれまでよりぼかしてしまった. 物質と輻射は, 時間と空間を定義し区別するのに重要であることには変わりないし, 空間と時間は物

質と輻射を定義するのに重要であることは変わりない. ここから抜け出すには, 山登りを続けることしかない.





Chapter 11

一般相対論を一言で – 素人の方へのまとめ

“Sapientia felicitas.*”

Antiquity

一般相対論は，巨視的運動の最終的な完全な記述である．一般相対論は，まずは，重力によるあらゆる巨視的運動，特に，任意の二人の観測者が行う運動の観測結果どう関係づけられているかを記述する．さらに，一般相対論は宇宙全体を記述する．特に，一般相対論は，最も高速で，最も荒々しく，最も離れた，つまり，最も極端な運動を記述する．

一般相対論を用いた巨視的運動の記述は最終的で，正しい．一般相対論からの計算結果や予測は，比較できるすべての観測で一致している．(これはダークマターについてはまだわからない．この問題はまだ決着がついてない.)

一般相対論は，観測から導かれた二つの原理に基づいている．

– すべての観測者は，自然界には，「完全な」速度，つまり，(近くの) 物質に対し共通の最大エネルギー速度が存在することに同意する．その不変速度値 $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ は，光とか電波のような質量をもたない輻射により達成される．
– すべての観測者は，自然界には，「完全な」力，つまり，(近くの) 物質に対し共通の最大力が存在することに同意する．その不変力の値 $F = \frac{c^4}{4G} = 3.0258(4) \cdot 10^{43}\,\mathrm{N}$ は，事象の地平線で達成される．

これらの二つの観測は，完全な相対論を含んでいる．特に，これらの観測から次のことが引き出される:

– 時空は，一変数 (曲率) の $3+1$ 連続次元次元の事象で構成される．曲率は，例えば，潮汐効果のような事象間の距離の測定から導出できる．時間，長さ，曲率の測定値は観測者ごとに違うが，どう違うかは予測できる．つまり，私たちは擬リーマン時空で暮らしている．
– 時空と空間は質量とエネルギーの近くで曲がる．ある点の曲率は，その点のエネルギー運動量密度で決まり，場の方程式で記述される．物質とエネルギーが運動すると，時空の曲率もそれとともに動いてゆく．この動きに組み込まれた遅れにより，光より速いエネルギー

* ‘知識は幸福’ この古言はオックスフォード大学の モットーであった.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

の移動が不可能になる. エネルギーと曲率の間の比例定数は非常に小さく, 曲率は日常生活では観測されない. つまり, 万有引力として, 間接的に観測される.

- 物質や輻射や真空のすべての巨視的運動は一般相対論の場の方程式で記述される.
- 空間は弾性をもっている. つまり, 平坦になろうとする. 弾性があるため, 物質を独立に振動させ, これを, 重力輻射とか重力波と呼んでいる.
- 自由に落下する物体は測地線, つまり, 曲がった時空の最長経路に沿って運動する. 空間的には, 質量の近くを光が通過すると, 光は曲げられるが, その量は, 万有引力で予想される値の2倍である.
- 重力を記述するには, 少なくとも距離がシュワルツシルト半径 $r_S = 2Gm/c^2$ のオーダーになるときはいつも, 曲がった時空, つまり, 一般相対論が必要となる. 距離がこの値よりずっと大きい時は, 相対論的な重力と gravitomagnetism (座標系の引きずり) で十分である. 距離が大きく, 速度も光より遅い場合は, 万有引力の記述 $a = Gm/r^2$ と平坦なミンコフスキー時空で良い近似が成り立つ.
- 空間と時間は大局的には区別できないが, 物質があれば, 局所的にだけ, 区別することができる.

さらに, 空に見えるすべての物質やエネルギーから次の結論が得られる.

- 宇宙のサイズは有限である. そのサイズは大体 $r_{max} \approx 1/\sqrt{\Lambda} \approx 10^{26}\,\mathrm{m}$ である. 宇宙定数 Λ はエネルギー密度の効果も持っている. これがダークエネルギーだと言われている.
Page 184
- 宇宙の年齢は有限である. これが, 夜空が暗い理由である. 地平線が測定できる時空間隔の限界で, 約140億年である.
- 宇宙的なスケールでは, あらゆるものが, 自分を除くあらゆるものから遠ざかっている. つまり, 宇宙は膨張している. 夜空の地平線同様, その根底にある空間の膨張の詳細は一般相対論の場の方程式で記述される.

まとめると, 一般相対論が従う最大力の原理と最大速度の原理は, 重力による運動や宇宙で観測される巨視的運動をすべて記述している.

記述の正確さ

一般相対論は報われたのだろうか? 正確さについての議論は, 便宜上, 二組の実験に分類できる.
Ref. 275
第一の組はどのように物質は動くかを測定する実験である. 物体は本当に測地線に沿って運動しているのだろうか. Table 9にまとめるように, すべての実験は誤差の範囲内,
Ref. 276
つまり, 少なくとも10^{12}分の1の範囲内で理論と一致している. つまり, 物質の落下については, 一般相対論で非常にうまく記述できている.

測定の第二の組は時空自身の動力学にかんするものである. 時空の動きは一般相対論の波動方程式に従っているのだろうか. つまり, 時空

TABLE 9 一般相対論のテストの分類

測定効果	精度	分類型	参考文献
等価原理	10^{-12}	物質の運動	Ref. 148, Ref. 275, Ref. 277
$1/r^2$依存性 (時空の次元)	10^{-10}	物質の運動	Ref. 278
Gの時間依存性	10^{-19} /s	物質の運動	Ref. 275
赤方偏移 (太陽, 地球, シリウスについての光とマイクロ波)	10^{-4}	時空の曲率	Ref. 127, Ref. 125, Ref. 275
近日点移動 (4つの惑星, イカルス, パルサー)	10^{-3}	時空の曲率	Ref. 275
光の曲り (太陽, 恒星や銀河のまわりの光, 電波)	10^{-3}	時空の曲率	Ref. 275
時間の遅れ (太陽やパルサーの近くでの電波)	10^{-3}	時空の曲率	Ref. 275, Ref. 166
Gravitomagnetism (地球, パルサー)	10^{-1}	時空の曲率	Ref. 158, Ref. 159
測地線効果 (月, パルサー)	10^{-1}	時空の曲率	Ref. 155, Ref. 275
重力波放出の遅れ (パルサー)	10^{-3}	時空の曲率	Ref. 275

は, 本当に, 理論が予想するように, 物質により曲げられているのだろうか. 地球の近くや地球から遠く離れた所で, また, 弱い場と強い場の両方で多くの実験がされている. すべてが測定誤差内で予測と一致している. しかし, 最良の測定でも, その精度は有効数字3ケタしかない. 多数の実験がなされたが, Table 9に示すように, テストの種類としては数種類しかない. 新しいタイプの実験の発見が名声と富を保証している. もちろん, 一番探索されているのは, 重力波の直接検出である.

Ref. 275, Ref. 276

Challenge 397 ny

Table 9について, もう一つコメントしておきたいのはオーダーについてである. 何十年にわたり, 測定された効果はv^2/c^2のオーダーの精度しかなかったが, パルサーにおける強い場の効果のおかげで, v^4/c^4のオーダーに到達できた. 高精度の衛星実験装置を用い, 太陽系内部においても, このオーダーの効果がまもなく検出されるのちがいない. すべての測定の中での現時点での最高峰は, 重力波放出の遅れで, それでも, 高々v^5/c^5のオーダーである.

Ref. 275

Page 167

時空の高精度曲率測定が難しいのは, 質量が, いつも, パリにあるキログラム原器を用い (間接的に) 天秤で測定されていて, 標準曲率を定義し G 値を固定するやり方をとっていないためである. 実際, 天体を用いた有用な曲率測定はいままで行われていない. この領域でブレークスルーがあれば, ニュースになるだろう. 現在, 金1キログラムやオレンジ1キログラムを, 1キログラムの精度で定義できるような天体曲率法はまだない.

一般相対論をチェックするもう一つの方法は，他の重力記述方法を探すことである．他にかなり多くの重力理論が定式化され，研究されたが，これまでのところ，すべての実験に一致するものは一般相対論しかない Ref. 276, Ref. 279

まとめとして，Thibault Damourが好んで説明するように，一般相対論は，物質やエネルギーの運動については，少なくとも，99.999 999 999 9 %正しく，物質やエネルギーが空間を曲げ，動かす方法については99.9 %正しい．例外，反重力，不明な実験データは知られていない．アルバート・アインシュタインのやり方には不備はない． Ref. 275

一般相対論は，微視的な運動に対するテストはされていない．この状況とは，微視的運動は，作用が作用量子，つまり10^{-34} Jsぐらいの運動である．このトピックは私たちの冒険の最後で主に語られる．

一般相対論と宇宙論の研究

一般相対論の研究は，依然，盛んであるものの，下火傾向にある．下火傾向が強いのは，アルバート・アインシュタインがこの理論を作り上げたスイスやドイツといった国々においてである．しかし，宇宙論や天体物理学の研究は，現在，最高に達している．ここで，簡単に概観しておこう． Ref. 280

＊＊

一般相対論のもっとも興味のある実験的研究は，二重パルサーを用いた検証，重力波の探索，そして，人工衛星を用いた高精度測定である．，とりわけ，特殊な人工衛星は銀河の考えられるパルサーをすべて捉える可能性がある．これらの実験はいずれも，実験的検証をこれまで届かなかった領域まで拡げる．

＊＊

宇宙衝突や多体問題，特に，中性子星やブラックホールが関係するこれらの研究は，天文学者が望遠鏡で観測している豊富な情報の理解を修正する手助けになる． Ref. 258

＊＊

場の方程式のカオスの研究は，初期宇宙の研究で根本的に興味のあるもので，物理学のもっとも大きい未解決問題の1つである銀河形成の問題に関係がある． Ref. 281

＊＊

銀河形成についてのデータを収集することは，いくつかの衛星系や特殊目的の望遠鏡の主目的になっている．一つの焦点は，原銀河による局所マイクロ波背景の非等方性の探査である． Ref. 282

＊＊

物質密度，曲率や真空密度といった宇宙パラメータの決定するため，

Ref. 226 現代天文学は中心的な努力を行っている. 宇宙定数またはダークエネルギーとも呼ばれる真空密度の調査やダークマターの性質の解明も天体物理学の重要な研究分野になっている.

* *

天文学者や天体物理学者は, 絶えず, 空で起きる新現象を捉えようとしている. さまざまなタイプのガンマ線バースト, エックス線バースト
Ref. 283 や光のバーストは, まだ, 完全に理解されていない. たとえば, ガンマ線バーストは, 太陽のような恒星を 10^{17} 個集めた位の明るさになる. それも, 数秒間しか続かない. この
Vol. V, page ?? 研究トピックの詳細については後に述べる.

* *

場の方程式のすべての解のコンピュータデータベース化が進められている. とりわけ, 研究者は, それらが本当に互いに異なっているかどうかのチェックを行っている.
Ref. 284

* *

ワームホールとか点状粒子のような自明でないトポロジーを持つ場の方程式
Ref. 285 の解は魅力的な探求分野である. しかし, このような解は量子効果
Vol. V, page ?? によれば不可能である.

* *

計量以外の量を持つ時空を記述する一般相対論の定式化が, ずっと, 継続されており, 重力と量子世界の間の関係をはっきりさせることが期待されている. いわゆるAshtekar変数が, このような近代的な記述法
Ref. 286 である.

* *

初期宇宙と素粒子の性質との関係, ビッグバン後の最初の数秒間という短時間の加速的膨張である インフレーションのような推測物との関係は
Ref. 287, Ref. 288 依然として重要なトピックである.

* *

量子物理, 素粒子物理および一般相対論の統合は重要な研究分野で長年にわたり研究者が取り組んでいる. その目的は運動の完全な記述を探す
Vol. VI, page ?? ことにある. この冒険の最後の部分のトピックでもある.

* *

最後に, 長年, ギリシア文字の添え字, 微分形や反講義形式なアプローチを盾に取ってきた一般相対論の教育は, 将来, もっと物理にフォーカスし, 定式主義を減らすことで, もっと恩恵をうけるだろう.
Ref. 289

一般相対論は変わり得るのか?

> 重力があるのはいいことだ. さもないと, 鳥が死ぬと, そのまま, そこに留まるだろう. 猟師はまったく戸惑うだろう.
>
> Steven Wright

重力定数は, エンジンの仕事率だけでなく, 物体の密度や加速度の上限を与える. 私たちはこの値の不変性をもとにしていろんな結論を導いている. この重力定数Gは場所や時間によって変化することはないのだろうか. この問いはちょっとまぎらわしいところがある. 一見すると, はっきりとした答えが聞こえてくる. 「もちろん, そうさ. 公式の中のGが変わったら, どうなるかを考えればいいのさ. 」しかし, この答はちがっている. 光の速度cについても同じことがいえ, 同様に誤っている.

Page 95

重力定数は, 重力の定義に従い, 知らず知らずのうちに, すべてのものさし構造, すべての測定標準, すべての測定装置に入ってきているので, その値が実際に変化するのかどうかを検出する方法はない. 変化を検出する実験も考えられない. 好むと好まないとに関わらず, あらゆる力の測定は, 力の極限値との比較になる. 原理的に, 標準の普遍性をチェックする方法がないのである. しかし, Table 9に示すように, これをチェックしようとする実験が絶えず報告されているのには, 驚かされる. しかし, この類の実験結果も簡単に予想できる. 変化は見つからないであろう.

Challenge 398 e

Page 276

空間の次元数は3以外にあるのだろうか. このことは, かなり, ややこしい. 例えば, 3という数字は, ゼロリッチテンソルが, ゼロで無い曲率と矛盾しないための最小の数字である. 一方, 3より大きい数字は, 重力の逆二乗則からのずれを生じると考えられる. これを指向するデータはない.

別の一般相対論の方程式はあるのだろうか. 前世紀に, 理論学者は多くの別の方程式を調べた. しかし, 実験データに合致しているように思える別の提案はほとんどできなかった. 通常, 二つの候補がよく語られる.

まず, 場の方程式にねじれを導入し, 一般相対論に粒子のスピンを導入しようとする試みである. 一般相対論にねじれを入れるだけであれば, 新しい基本定数は必要ない. Raychaudhuri方程式ではねじれがないことを仮定している. ねじれを含んだ拡張Raychaudhuri方程式を使用し, 最大力の原理を利用すると, 完全なEinstein–Cartan理論を導けるかもしれない. しかし, どの議論においても, ねじれは不要な複雑さを導入することを示唆している.

Ref. 291

第二に, 説明のつかないある実験結果がある. 銀河の中心から離れた可視物質のの回転速度で, これにはダークマターの存在, または万有引力の逆二乗則からのずれが関係しているかもしれない. 後者を認めると, 天文学的に大きな距離に対して, 場の方程式の修正を余儀なくされるだろう. ダークマターを認めると, 観測できていないものがあることになり, 方程式の中に反映されていなかったものがあるとし, 動力学の修正することになるだろう. 現時点では, ダー

Ref. 292

クマターの存在を仮定する研究者が多い. しかし, ダークマターの性質はよくわかっておらず, この問題も十分決着していない.

> 私の信仰上についての信条についての記述は, もちろん, 嘘である. 意図的に順繰りにくりかえされた嘘である. わたしは個人的な神の存在は信じないし, これを拒否もしない. ただ, 明確に言いたい. もし, 私の中に信仰とよべるものがあるとしたら, それは, 科学が明らかにした世界の成り立ちを, 無限に称賛することだ
>
> アルバート・アインシュタイン, 1954年3月24日

一般相対論の限界

これまで, 運動をどう記述するかについて示してきた. うまくいったし, 魅力的ではあるものの, まだ満足のゆくものではない. 多分, 未解決の問題 があると直感的に感じているのではないかと思う. Challenge 399 e

まず, 光速が理論全体の出発点であったにもかかわらず, 私たちは, 光とは, 実際, 何かというのを知らない. 光が何かを理解するのは, 次のトピックである.

第二に, 質量を持っているものはどんなものでも, 測地線に沿って落下することがわかった. しかし, 山は落下しない. なんとかして, 下にある物体が山を落下させないように邪魔をする. どうやって. そして, 質量は, ともかく, どこから生じるのだろうか. 物質とは何か. 一般相対論は, どんな答えも与えてくれず, 質量の記述も まったくしない. アインシュタインは, 時空の曲率を表す場の方程式の右辺は花崗岩で, 物質を表す右辺は砂であると言ったことがある. 実際, 現時点では, 私たちは, 物質や質量は何なのか知らない (そしてダークマターはもっとわからない). すでに, コメントしたように, 砂を岩に変えるには, まず, 量子物理が, そして, さらに, 相対論との統一が必要である. これは, 私たちの残りの冒険に予定している.

空間と時間を明確に区別し, 特に, 時計や物差し, はかりの動作を理解するには, 物質が必要であることを見た. しかし, 一つ, 問題が残っている. 自然界には, 質量, 長さや時間の単位が, いったい, なぜあるのか. なぜ, 測定が可能なのかを理解することは, 量子物理のもう一つのトピックである.

また, 私たちは, 真空について, あまりにも知らなさすぎる. 宇宙定数の大きさ, その時間依存性や時空の次元数についても知る必要がある. この時, 単に, なぜ, 空はこんなに遠いのかという簡単な質問に答えるだけである. 一般相対論は, ここでは, 何の助けにもならない. 観測された宇宙定数の小ささは簡単な量子論とは矛盾することがそのうちわかるだろう. まだ, モーションマウンテンのの頂に到達するまでに, 大分のぼらなければならない理由がここにある. Vol. VI, page ??

最後に, 私たちは重要な問題を隠していた. 一般相対論は点物体, つまり, 点粒子の存在を禁じているのだ. しかし, 点粒子の考え

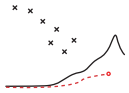
方は, 最初に, 空間点を導入した一つの理由である. 空間点の考え方は最後にどうなるのであろう. また, この段階では, この問題は未解決である.

つまり, 運動をうまく説明するには, 光, 物質そして真空をもっと細かく記述する必要がある. つまり, あらゆることについてもっと知ることが必要である. さもないと, 山や, 時計や星についての疑問は解けない. 特に, 小さなスケールでの光, 物質や真空をもっと知る必要がある. 世界の微視的側面について理解する 必要がある.

Vol. V, page ??

小さなスケールでは, 空間の曲率は無視できる. 従って, 重力の無い状態に, 一度立ち戻り, 光, 物質や真空の微視的状態を詳しく調べる. この領域を量子物理と呼ぶ. 前書きで示したFigure 1は, 何が私たちを待ち受けているかの概要を表している. そして, 平坦時空への単純化にもかかわらず, この冒険は美しく強烈なものになってゆく.

Page 8



Appendix A

単位, 測定と定数

測定とは標準との比較である. 標準は単位をもとにしている. 世界中で多くの異なった単位系が使用されてきた. これらの標準の多くは, それが委ねられた組織に力を与える. この力が誤使用されることもある. 例えば, 今日では, コンピュータ産業において, そうであるし, 遠い昔にもそれはあった. いずれにしても, その解決法は同じで, どこにも依存しないグローバルスタンダードをまとめあげることである. 測定単位について言えば, これが起きたのは十八世紀である. 権威を持つ研究所の誤使用を回避し, 標準の違いや変更や 再現性の問題を除き, 冗談ではないが, 税の徴収を簡素化するため, 科学者や政治家や経済学者がある単位が合意された. これは*Système International d'Unités*, 縮めて, *SI*単位とよばれ, 国際条約により, ‘メートル条約’として定義された. この単位は, 国際組織 ‘国際度量衡総会 (CGPM) ’, その下部組織である‘国際度量衡委員会 (CIPM) ’と‘国際度量衡局 (BIPM) ’により維持されている. いずれも, フランス革命直前のころに作られた.

Ref. 293

SI単位

SI単位はすべて, 7つの基本単位からなる. それらの公式定義 (正式のものはフランス語) を, その制定年とともに以下に示す.

- ‘秒はセシウム133原子の基底状態の二つの超微細準位間の遷移に対応する輻射の9 192 631 770周期分の時間’ (1967)*
- ‘メートルは1秒の1/299 792 458の時間間隔に光が真空中を進む径路の長さ’ (1983)*
- ‘キログラムは質量の単位で, 国際キログラム原器の質量に等しい’ (1901)*
- ‘アンペアは, 無限長の円断面積が無視できる2本の真直ぐな平行導体を, 真空中で1メートルの間隔で置いたとき, これらの導体間に, 1メートル当たり$2 \cdot 10^{-7}$ニュートンの力を生じるような一定電流’ (1948)*
- ‘ケルビンは熱力学温度の定義で, 水の三重点の熱力学的温度の1/273.16’ (1967)*
- ‘モルは0.012キログラムの炭素12内に存在する原子数と同じ要素物質を含む系の物質の量’ (1971)*
- ‘カンデラは, 周波数$540 \cdot 10^{12}$ヘルツの単色輻射を放出し, ある方向でのステラジアンあたり (1/683) ワットの輻射強度を持つ光

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

源が, その方向へ発する明るさの強度 ' (1979)*

近い将来, SI単位の定義を, http://www.bipm.org/en/si/new_si/で説明されているように, page 8の立方体図を基盤にしたものに変更しようということが計画されている.

時間の単位も長さの単位もある標準運動の性質, つまり, 光の性質として定義されている. つまり, 国際度量衡総会も, 運動の観測は空間と時間の構築と定義にとって必須条件であることを明確にしている. 運動はすべての観測とあらゆる測定の基本である. ところで, 定義の中で光を使用することは, 1827年にすでに, Jacques Babinetにより提案され ていた. **

これらの基本単位の積や商をとることで, 他のすべての単位が定義されている. 従って, すべてのSI単位は次の性質をもっている.

- SI単位は最高水準の精度を持つシステムを形成している. すべての単位は普通用いられる測定の精度より高い精度で定義されている. さらに, 定義の精度は絶えず進歩している. 秒の定義の現在の相対精度は約10^{-14}, メートルに対しては約10^{-10}, キログラムに対しては約10^{-9}, アンペアに対しては10^{-7}, モルに対しては10^{-6}未満, ケルビンに対しては10^{-6}, そしてカンデラに対しては10^{-3}である.
- SI単位は絶対システムを形成している. すべての単位は, 適切に設備が整えられていればどんな研究所でも高精度に再現できるように定義されている. これにより, 標準を設定する組織が誤った使用をできるだけしないようになっている. (キログラムだけが, この要求の最後の例外で, 人工物の助けを借りている. この人工物を定義から除くための研究がされ, 世界的に競い合っているが, もう数年はかかるだろう. 現在, 2つのアプローチがある. 一つは粒子の計数でもう一つは$\hbar$を決めることである. 前者は, 純粋のケイ素から作られた結晶内で行うことができ, 後者は$\hbar$が現れるような, ドブロイ波長やジョセフソン効果の公式 を利用する.)
- SI単位は実用的なシステムである. 基本単位は日常的な大きさのものである. よく使われる単位は標準の名称と略称がある. 完全なリストには, 先ほど述べた7つの基本単位, 補助単位, 組立単位,, 併用単位が含まれている.

補助SI単位には2つある. (平面) 角に対しては, 半径に対する弧長の比として定義されたラジアン (rad) がある. 立体角の単位としては, 半径のは二乗に対する立体角で覆われる面積の比で定義されるステラジアン (sr) がある.

---

* 各シンボルはs, m, kg, A, K, mol, cdである. 国際キログラム原器は白金-イリジウム製の円筒で, フランスのセーヴルにあるBIPMに保管されている. セシウム原子の準位については原子物理学の本を参照のこと. 摂氏温度θは$\theta/°C = T/K - 273.15$は定義される. ただし, この式はケルビンの定義で現れる数字とは少し値がちがう. また, SIでは「モルを使用する時, 要素物質としては原子, 分子, イオン, 電子, その他の粒子, またはこれらの粒子の特定グループが考えられる」と書かれている. モルの定義においては, 炭素12原子は束縛されておらず, 静止していて, 基底状態にあるものとして考えられている. カンデラの定義では, 光の周波数として, もっとも目に対する感度が高い緑色, 555.5 nmが使用されている.

** Jacques Babinet (1794–1874), フランスの物理学者で, 光学についての著名な作品を出版した.

Vol. I, page ??
Ref. 294

特定の名前が付けられた組立単位には次のようなものがある. (名前を英語でつづる時は, 大文字やアクサンは付けないで記する.)

名前	省略形
ヘルツ	$\mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}$
パスカル	$\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2} = \mathrm{kg/m\,s^2}$
ワット	$\mathrm{W} = \mathrm{kg\,m^2/s^3}$
ボルト	$\mathrm{V} = \mathrm{kg\,m^2/As^3}$
オーム	$\Omega = \mathrm{V/A} = \mathrm{kg\,m^2/A^2s^3}$
ウェーバー	$\mathrm{Wb} = \mathrm{Vs} = \mathrm{kg\,m^2/As^2}$
ヘンリー	$\mathrm{H} = \mathrm{Vs/A} = \mathrm{kg\,m^2/A^2s^2}$
ルーメン	$\mathrm{lm} = \mathrm{cd\,sr}$
ベクレル	$\mathrm{Bq} = 1/\mathrm{s}$
シーベルト	$\mathrm{Sv} = \mathrm{J/kg} = \mathrm{m^2/s^2}$

名前	省略形
ニュートン	$\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}$
ジュール	$\mathrm{J} = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg\,m^2/s^2}$
クーロン	$\mathrm{C} = \mathrm{As}$
ファラッド	$\mathrm{F} = \mathrm{As/V} = \mathrm{A^2s^4/kg\,m^2}$
シーメンス	$\mathrm{S} = 1/\Omega$
テスラ	$\mathrm{T} = \mathrm{Wb/m^2} = \mathrm{kg/As^2} = \mathrm{kg/Cs}$
度 (摂氏)	°C (ケルビンの定義参照)
ルックス	$\mathrm{lx} = \mathrm{lm/m^2} = \mathrm{cd\,sr/m^2}$
グレイ	$\mathrm{Gy} = \mathrm{J/kg} = \mathrm{m^2/s^2}$
カタル	$\mathrm{kat} = \mathrm{mol/s}$

すべての単位の中で, キログラムだけは 1, 0, −1 のべきしか存在しない. その理由を説明できるか.

Challenge 400 s

併用される非SI単位には分, 時, 日 (時間に対し), 度$1° = \pi/180\,\mathrm{rad}$, 分$1' = \pi/10\,800\,\mathrm{rad}$, 秒$1'' = \pi/648\,000\,\mathrm{rad}$ (角度に対して), リットルそしてトンがある. 他のすべての単位は無効である.

すべてのSI単位は, 10のべきを表す名前と略記を導入することで利用しやすくなっている. これを接頭辞 (プレフィックス) と呼ぶ. *

べき	名前		べき	名前		べき	名前		べき	名前	
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d	10^{18}	Exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c	10^{21}	Zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m	10^{24}	Yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{6}	Mega	M	10^{-6}	micro	μ	unofficial:			Ref. 295		
10^{9}	Giga	G	10^{-9}	nano	n	10^{27}	Xenta	X	10^{-27}	xenno	x
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	pico	p	10^{30}	Wekta	W	10^{-30}	weko	w
10^{15}	Peta	P	10^{-15}	femto	f	10^{33}	Vendekta	V	10^{-33}	vendeko	v
						10^{36}	Udekta	U	10^{-36}	udeko	u

▪ SI単位は完全なシステムを形成している. 系統的に, 物理的な観測可能物のすべての組をカバーする. さらには, すべての他の科学

* 発明された名前 (yoctoはラテン語の*octo*‘8’と音が似ている. zeptoはラテン語の*septem*と音が似ている. yottaとzettaは, それぞれ, これらに似せてある. exaとpetaはギリシア語の‘6倍’と‘5倍’を表すἑξάκιςとπεντάκιςに音がにている. 非公式のものにはギリシア語の9, 10, 11, 12に音がにているものもある.); デンマーク語/ノルウェー語によるもの (attoは*atten*‘18, femtoは*femten*‘15’からとられている.); ラテン語によるもの (*mille*‘thousand’, *centum*‘hundred’, *decem*‘ten’, *nanus*‘dwarf’); イタリア語によるもの (*piccolo*‘小さな’); ギリシア語によるもの (microはμικρός‘小さい’から, deca/dekaはδέκα‘10’から, hectoはἑκατόν‘100’から, kiloはχίλιοι‘1000’から, megaはμέγας‘大きい’から, gigaはγίγας‘巨大’から, teraはτέρας‘モンスター’から).

翻訳してみてください: I was caught in such a traffic jam that I needed a microcentury for a picoparsec and that my car's fuel consumption was two tenths of a square millimetre.

Challenge 401 e

の測定単位も規定している.

- SI単位は万国共通なシステムを形成している. 貿易, 産業, 商業, 家庭, 教育, 研究で使用できる. もし, 存在するとしたら, 地球外文明にも使えるかもしれない.
- SI単位は首尾一貫したシステムを形成している. 2つSI単位の積または商もSI単位系になる. 原理的にどの単位にも‘SI’という同じ略称を使える.

SI単位は, これらの条件をすべて満たす唯一の可能な組であるばかりではなく, 唯一存在するこれを満たすシステムでもある. * 近い将来, BIPMは, SI単位を定義するのに, Figure 1のような物理定数の立方体を使用することを計画している. この計画では, すでに固定されているcに加えて, eとkの値も固定しようとしている. 唯一例外として残るのが, 定数Gを使用せず, 原子遷移を用いて定義している基本時間単位である. 使用しないのはこの定数が高精度で測定できないからである.

測定の意味

どんな測定も, 標準との比較となる. 従って, どんな測定においても, 標準 (速度の標準に対しても) とする物質, 比較を行うための輻射が必要になる. 従って, 測定の考え方には, 物質と輻射が存在すること, そして, それらが互いに, 明確に分離できることを仮定している.

Challenge 402 e

どんな測定も比較作業である. 従って, 測定は空間と時間の存在とそれらが互いに別のものであることを仮定している.

どんな測定も測定結果が生じる. 従って, どんな測定でも, 結果を保存することを意味する. 測定過程においては, 測定前後で状態が変わってしまう可能性がある. 言い換えると, どんな測定も不可逆過程である.

どんな測定も過程である. 従って, どんな測定でも, ある程度の時間がかかり, ある程度の空間が必要である.

測定のこれらの性質はすべて単純だが重要である. そうじゃないという人がいたら, 気を付けたほうがいい.

単位についての楽しみとおもしろいチャレンジ

1秒は, 今では, 1日の1/86 400ではない. それは1900年の話である. 現在, 地球は自転するのに約86 400.002 sかかっている. そのため, 国際地球回転・基準系事業 *(IERS)* は, 12時きっかりに太陽が空

---

* 国際単位とは別に, 地域限定の単位もある. 依然として使用されている地域限定の単位は, 主に, ローマ起源のものである. マイル (mile) は, 歩幅2倍した1480 mmの1000歩として使用されていた*milia passum*からきている. 1海里は, かつては, 地球表面の弧の1分として定義されたいたが, いまは調度1852 mと定義されている. インチは*uncia*/*onzia*からきている (1フィートの12分の1). ポンド (重さを測るという意味の*pondere*からきている) は. 天秤を表す*libra*を変化させて, 短縮形のlbの起源になっている. 10の代わりにダースで勘定する習慣は, ローマ起源である. これらの単位や, 他に, 速度の単位としてのfurlong/fortnightのように‘f’で始まる冗談のような単位は, 現在, 公式にはSIユニットを何倍かしたものとして定義されている.

の最高点に来る様, 定期的に, うるう秒を追加しなければならない.* このように定義された時間を協定世界時 *(UTC)* という. 地球の回転速度も天候により日々不規則に変化する. 平均の回転時間も極氷の変化により, 冬から夏へと変化する. さらに, 潮汐による摩擦のため, その平均も時間とともに小さくなっている. うるう秒の追加する割合は, かつては, 500日に一度であったが, 最近は増加し, しかも, 不定期になっている.

* *

SI単位を使わないと, コストが高くつくことがある. 1999年, NASAは火星上で衛星を一基失った. これは, 何人かのソフトウェアプログラマーがコードの一部に, SI単位ではなく, 地域特有の単位を使用したためだった. メートルの代わりにインチを使った結果, マーズ・クライメイト・オービターは, 軌道を回ることができず, 惑星表面に激突した. 損失は一億ユーロであった.**

* *

自然界で最も精密に測定されたものはミリ秒パルサーの周波数,*** , 狭い原子遷移の周波数, 水素原子のリュードベリ定数で, 秒を定義できるほど精密に測定できる. 秒を定義するセシウム遷移は有限の線幅を持っており, その幅が達成可能な精度の限度となっている. その限度は約14桁である.

* *

測定された基本物理定数の中で最も精度が悪いのが重力定数Gと強い相互作用の結合定数α_sである. それほどでもないが, 精度の悪さでは, 宇
Page 294 宙の年齢とその密度がよく知られている. (Table 14参照) .

* *

量そのものの値を測定するより, 量の変化を測定するほうがはるかに簡単な時がある. たとえば, 重力波の検出がそうである. 1992年に達成された精度は, 1 mの長さに対し$\Delta l/l = 3 \cdot 10^{-19}$である. これは, 1立方メートルの金属ブロックに対し, 陽子の半径より3000倍小さい長さの変化を測定できる精度である. これらの設備は現在リング干渉計に置き換えられようとしている. すでに, 10^{-21}の周波数差を測定できる
Ref. 297 リング干渉計が建設され, さらに, 性能向上が図られている.

* *

SI接頭辞は現在72のオーダーの強度までカバーしている. いくつまで接頭辞を追加する必要があるのだろうか. いくら追加しても無限の可能性

---

* うるう秒の追加の詳細情報はhpiers.obspm.frに掲載されている. また同様に, maia.usno.navy.milも有用な情報与えてくれる軍のサイトである. BIPMのサイトwww.bipm.frも参照のこと.

** この話により, 世界中でSI単位系を使用しない国が三カ国あって, それぞれ, リベリア, ミャンマーとアメリカ合衆国であるというかつてのでまかせが生き返った.

*** すばらしい仕事の概要はJ. H. Taylor, *Pulsar timing and relativistic gravity*,Philosophical Transactions of the Royal Society, London A 341, pp. 117–134, 1992.で読むことができる.

の一部分でしかないことには変わりない. 国際度量衡総会 (CGPM) は無限の数のSI接頭辞を定義することを, 永遠に続けなければならないのだろうか. それはなぜか.

* *

フランスの哲学者ヴォルテールは, ニュートンに会った後, リンゴが木から落ちるのを見たニュートンが, 物体の落下と月の運動の関連性を発見したという有名な話を公表した. それから, 一世紀以上経過した, フランス革命の直前に, 科学者会議は, 力の単位として, 標準リンゴに作用する重力により発生する力を使用することを採択し, 標準リンゴにこのイギリスの科学者にちなんだ名前をつけた. 広範な研究から, 標準のリンゴの質量は101.9716 gであることがわかり, その重さを1ニュートンと名付けた. それ以降, パリ近郊のセーヴルの博物館の訪問者は, 標準メートルと標準キログラム, そして標準リンゴを愛でることができるようになった. *

測定の精度と確度

測定は物理学の基礎である. あらゆる測定には誤差が伴う. 誤差は精度や確からしさの欠如によるものである. 精度とは, 測定を繰り返したときその結果がどのくらい再現するかで, 確度とは測定結果の真値との違いの程度をあらわす.

精度が落ちる原因は偶然による誤差, つまり, ランダム誤差で, 標準偏差でうまく表すことができる. 標準誤差 σ は,

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \,, \tag{293}$$

で定義される. ここで $\bar{x}$ は, 複数の測定結果の値 x_i の平均である. (この公式で, n ではなく $n-1$ が使われている理由を説明できるか.)

Challenge 403 s

大部分の実験では, 測定数が増えてくると, 測定値は正規分布, いわゆる, ガウス分布, になる傾向がある. Figure **??**に示すこの分布は

$$N(x) \approx \mathrm{e}^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \,. \tag{294}$$

の式であらわせる. 標準偏差の二乗 σ^2 は分散ともいう. ガウス分布する測定値では, 2.35σ が半値幅になる.

Challenge 404 e

精度の不足は, 系統的誤差;によるものだが, これらは算出することができる. この算出結果をランダム誤差に加えると全体誤差となる. これを, 全体の不確かさとよんだりする. 相対誤差は誤差と測定値との比である.

Ref. 299

---

* これは冗談である. 標準リンゴなんてどこにも存在しない. しかし, 英国や米国のリンゴの木の所有者の何人かは, 自分の木がニュートンが天啓を得たリンゴの木の子孫を植え替えたものであることを主張している. これは本当の話である. これらが, 同じ木から派生したものであるかを調べるためDNAテストが行われた. その結果は, やっぱり, MITの木は英国の木と同じではなかった.

Ref. 298

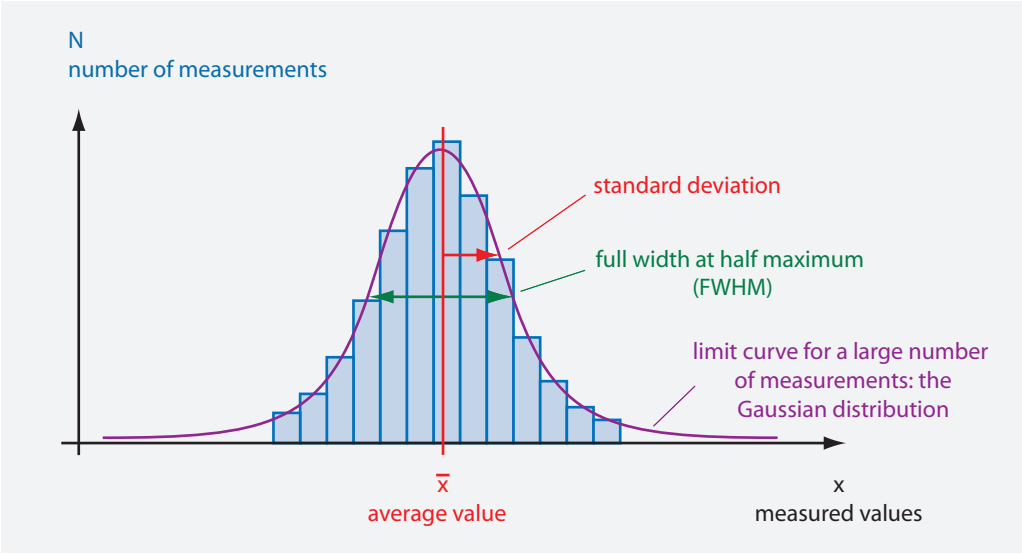


FIGURE 121 実験精度と測定結果の分布. 分布の幅が狭いほど, 精度が高い. 分布の中心と実際の値が一致すると確度が高い.

たとえば, 専門的な測定で0.312(6) mのような結果が得られたとする. 括弧内の数字は最後の桁の標準偏差 σ である. 上で述べたように, 測定結果のガウス分布を仮定している. 従って, 0.312(6) mの値の実際の値は次のように考えることができる.

Challenge 405 e

- 1σ 内に入る確率は68.3 %である. この例では0.312 ± 0.006 mに対応する;
- 2σ 内に入る確率は95.4 %である. この例では0.312 ± 0.012 mに対応する;
- 3σ内に入る確率は99.73 %である. この例では0.312 ± 0.018 mに対応する;
- 4σ 内に入る確率は99.9937 %である. この例では0.312 ± 0.024 mに対応する;
- 5σ 内に入る確率は99.999 943 %である. この例では0.312 ± 0.030 mに対応する;
- 6σ内に入る確率は99.999 999 80 %である. この例では0.312 ± 0.036 mに対応する;
- 7σ 内に入る確率は99.999 999 999 74 %である. この例では0.312 ± 0.041 mに対応する.

Challenge 406 s

(一番最後の数字は意味があるか.)

標準偏差は1桁である. 2つ使用するとその分野の専門家, それ以上だと愚か者. 標準偏差が示されていない場合は (1)を仮定している. 結果的に, 専門家の間では, 1 kmと1000 mは同じ長さではない!

2つの測定値AとBを加えたり, 差し引いたりしたときの誤差はどうなるでしょう. もし, すべての測定値が独立, または, 相関がない時には, 和の標準偏差も, 差の標準偏差も $\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$ であらわせる. 2つの測定値 C と D の積に対しても, 比に対しても, 結果は $\rho = \sqrt{\rho_C^2 + \rho_D^2}$ となる. ここで ρ の項は相対標準偏差である.

Challenge 407 s ある物体が, 3.0 sに1.0 mだけ動いたとしたとき, 速度の測定値はいくらか.

精度の極限

確度や精度の極限はどのくらいだろうか. 原理的にでも, 長さxを61桁以上の精度で測る方法はない. なぜなら, 自然界で, 測定できる最大の長さと最小の長さの比は $\Delta x/x > l_{\mathrm{Pl}}/d_{\mathrm{horizon}} = 10^{-61}$ である.
Challenge 408 e (この比は力に対しても, 体積に対しても成り立つか?) 私たちのこの本の最終巻で, 時計と物差しの研究から, この理論的極
Vol. VI, page ?? 限を裏付ける.

しかし, もっと厳しい現実的な極限を導くのも難しくはない. 地球の直径を, かつて, 測定された最小の長さ, つまり, 約10^{-19} mより高い精度で測定するできる機械はない. つまり, 約26桁になる. 1000 mのサイズの機械というもっと現実的な機械を使うと, 22桁になる. 以前に, 予測したように, 時間測定は実際は17桁の精度に達しているとすると, これは実際の極限に近い. なぜなら, サイズは別にして, 別の現実的な制約があるからだ. それは, コストだ. 実際, 測定精度を向上させようとすると, 装置コストの桁が上がることがよくある.

物理定数

物理学において, 一般的な観測は, もっと基本的なものから導びかれている. つまり, 多くの測定は, もっとの基本的な測定から導かれていることになる. 最も基本的な測定は物理定数の測定である.

次の表は, 標準的な出版物のように, 最も重要な物理定数や粒子
Ref. 300 の性質を, SI単位または一般によく使われる単位で表したものだ. 値は現在までに測定された最良の, 世界的に平均的なものである. 通常通り, 実験誤差にはランダム誤差と系統誤差の両方が含まれていて, その値は最後の桁の標準偏差として示している. 実際, 次の表のそれ
Ref. 301 ぞれの数字の背景には傾聴すべき長い物語があるが, ここでは, それに触れるだけの余裕はない.

Ref. 300 原理的に, 物質の定量的性質は量子論と物理定数を用いて計算されて
Vol. V, page ?? いる. たとえば, 色, 密度や弾性的性質は素粒子物理の標準模型の方程式と次の基本定数を用いて計算できる.

TABLE 11 物理基本定数

量	記号	SI単位での値	Uncert.[a]
SI測定単位で定義された定数			
真空中の光の速度[c]	c	299 792 458 m/s	0
真空透磁率[c]	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	0
		$= 1.256\,637\,061\,435\ldots$ μH/m	0
真空誘電率[c]	$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	8.854 187 817 620 ... pF/m	0
オリジナルなプランク定数	h	$6.626\,069\,57(52) \cdot 10^{-34}$ Js	$4.4 \cdot 10^{-8}$
換算プランク定数,	$\hbar$	$1.054\,571\,726(47) \cdot 10^{-34}$ Js	$4.4 \cdot 10^{-8}$

TABLE 11 (続き) 物理基本定数

量	記号	SI単位での値	Uncert.[a]
作用量子			
陽電子電荷	e	0.160 217 656 5(35) aC	$2.2 \cdot 10^{-8}$
ボルツマン定数	k	$1.380\,6488(13) \cdot 10^{-23}$ J/K	$9.1 \cdot 10^{-7}$
重力定数	G	$6.673\,84(80) \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2	$1.2 \cdot 10^{-4}$
重力結合定数	$\kappa = 8\pi G/c^4$	$2.076\,50(25) \cdot 10^{-43}$ $s^2/kg\,m$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
基本定数(出典不詳)			
時空の次元数		3 + 1	0[b]
微細構造定数[d] または	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$	1/137.035 999 074(44)	$3.2 \cdot 10^{-10}$
電磁結合定数	$= g_{em}(m_e^2c^2)$	= 0.007 297 352 5698(24)	$3.2 \cdot 10^{-10}$
フェルミ結合定数[d] または	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166\,364(5) \cdot 10^{-5}$ GeV^{-2}	$4.3 \cdot 10^{-6}$
弱結合定数	$\alpha_w(M_Z) = g_w^2/4\pi$	1/30.1(3)	$1 \cdot 10^{-2}$
弱混合角	$\sin^2\theta_W(\overline{MS})$	0.231 24(24)	$1.0 \cdot 10^{-3}$
	$\sin^2\theta_W$ (on shell) $= 1 - (m_W/m_Z)^2$	0.2224(19)	$8.7 \cdot 10^{-3}$
強結合定数[d]	$\alpha_s(M_Z) = g_s^2/4\pi$	0.118(3)	$25 \cdot 10^{-3}$
CKMクォーク混合行列	$\lvert V\rvert$	$\begin{pmatrix} 0.97428(15) & 0.2253(7) & 0.00347(16) \\ 0.2252(7) & 0.97345(16) & 0.0410(11) \\ 0.00862(26) & 0.0403(11) & 0.999152(45) \end{pmatrix}$	
Jarlskog不変量	J	$2.96(20) \cdot 10^{-5}$	
PMNSニュートリノ混合行列P		$\begin{pmatrix} 0.82 & 0.55 & -0.15 + 0.038i \\ -0.36 + 0.020i & 0.70 + 0.013i & 0.61 \\ 0.44 + 0.026i & -0.45 + 0.017i & 0.77 \end{pmatrix}$	
素粒子質量(出典不詳)			
電子質量	m_e	$9.109\,382\,91(40) \cdot 10^{-31}$ kg	$4.4 \cdot 10^{-8}$
		$5.485\,799\,0946(22) \cdot 10^{-4}$ u	$4.0 \cdot 10^{-10}$
		0.510 998 928(11) MeV	$2.2 \cdot 10^{-8}$
ミューオン質量	m_μ	$1.883\,531\,475(96) \cdot 10^{-28}$ kg	$5.1 \cdot 10^{-8}$
		0.113 428 9267(29) u	$2.5 \cdot 10^{-8}$
		105.658 3715(35) MeV	$3.4 \cdot 10^{-8}$
タウ質量	m_τ	1.776 82(16) GeV/c^2	
電子ニュートリノ質量	m_{ν_e}	< 2 eV/c^2	
ミューニュートリノ質量	m_{ν_e}	< 2 eV/c^2	
タウニュートリノ質量	m_{ν_e}	< 2 eV/c^2	
アップクォーク質量	u	1.8 to 3.0 MeV/c^2	
ダウンクォーク質量	d	4.5 to 5.5 MeV/c^2	
ストレンジクォーク質量	s	95(5) MeV/c^2	
チャームクォーク質量	c	1.275(25) GeV/c^2	
ボトムクォーク質量	b	4.18(17) GeV/c^2	
トップクォーク質量	t	173.5(1.4) GeV/c^2	
光子質量	γ	$< 2 \cdot 10^{-54}$ kg	
Wボゾン質量	$W^\pm$	80.385(15) GeV/c^2	
Zボゾン質量	Z^0	91.1876(21) GeV/c^2	

TABLE 11 (続き) 物理基本定数

量	記号	SI単位での値	Uncert.[a]
ヒッグス質量	H	126(1) GeV/c^2	
グルーオン質量	$g_{1...8}$	*c.* 0 MeV/c^2	
複合粒子質量			
陽子質量	m_p	$1.672\,621\,777(74)\cdot10^{-27}$ kg	$4.4\cdot10^{-8}$
		1.007 276 466 812(90) u	$8.9\cdot10^{-11}$
		938.272 046(21) MeV	$2.2\cdot10^{-8}$
中性子質量	m_n	$1.674\,927\,351(74)\cdot10^{-27}$ kg	$4.4\cdot10^{-8}$
		1.008 664 916 00(43) u	$4.2\cdot10^{-10}$
		939.565 379(21) MeV	$2.2\cdot10^{-8}$
原子質量単位	$m_u = m_{^{12}C}/12 = 1$ u	1.660 538 921(73) yg	$4.4\cdot10^{-8}$

a. 不確かさ: 測定誤差の標準偏差
b. 10^{-19} mから10^{26} mで測定されたもののみ.
c. 定数の定義
d. すべての結合定数は, リノーマリゼーションの節で述べたように, 4元運動量移行に依存する. 微細構造定数は, 4元運動量移行の最小$Q^2 = m_e^2c^2$の場合の電磁結合定数g_{em}に対し昔から使用されてきた名称. 高運動量移行の場合は, より大きな値$g_{em}(Q^2 = M_W^2c^2) \approx 1/128$になる. それに対し, 高結合定数は運動量移行が大きい方が小さな値になる. つまり, $\alpha_s(34\,\text{GeV}) = 0.14(2)$.

Page ??

これらの定数はなぜその値になるのか. 作用量子 $\hbar$ のように, 次元を持つどんな定数にも, その数値にはその歴史的意味がある. 作用量子は, SI単位のジュールと秒だから, $1.054\cdot10^{-34}$ Jsである. ある次元の定数の値が, なぜ, それよりも大きくも小さくもないか問う時には, その定数と, c, G, $\hbar$, αで定義されるそれに対応する自然単位の間の比を与える無次元数の起源を理解する必要がある. 自然体のもっと詳しい説明とその値は後で述べる. 原子, ヒト, 木や星, 分子や原子過程の継続時間, 原子核や山の質量を理解することは, これらの値と対応する自然単位の比を理解することである. 自然を理解する鍵はすべての比とすべての無次元定数を理解することである. 微細構造定数 α 自身を含めたすべての比の理解する旅は, 私たちの冒険の最後の巻にはいってやっと終了する.

Vol. IV, page ??

基本定数から, 以下の有用な高精度観測が生み出される.

TABLE 12 導出された物理 定数

量	記号	SI単位での値	誤差
真空の特性インピーダンス	$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$	376.730 313 461 77... Ω	0
アボガドロ数	N_A	$6.022\,141\,29(27)\cdot10^{23}$	$4.4\cdot10^{-8}$
ロシュミット数	N_L	$2.686\,7805(24)\cdot10^{23}$	$9.1\cdot10^{-7}$
273.15 Kおよび 101 325 Paにおいて			
ファラデー定数	$F = N_Ae$	96 485.3365(21) C/mol	$2.2\cdot10^{-8}$
万有気体定数	$R = N_Ak$	8.314 4621(75) J/mol K	$9.1\cdot10^{-7}$
理想気体のモル定数	$V = RT/p$	22.413 968(20) l/mol	$9.1\cdot10^{-7}$
273.15 Kおよび 101 325 Paにおいて			

TABLE 12 (続き) 導出された物理定数

量	記号	SI単位での値	誤差
リュードベリ定数 [a]	$R_\infty = m_e c\alpha^2/2h$	10 973 731.568 539(55) m^{-1}	$5 \cdot 10^{-12}$
伝導度量子	$G_0 = 2e^2/h$	77.480 917 346(25) μS	$3.2 \cdot 10^{-10}$
磁束量子	$\varphi_0 = h/2e$	2.067 833 758(46) pWb	$2.2 \cdot 10^{-8}$
Josephson frequency ratio	$2e/h$	483.597 870(11) THz/V	$2.2 \cdot 10^{-8}$
フォン・クリッツィング定数	$h/e^2 = \mu_0 c/2\alpha$	25 812.807 4434(84) Ω	$3.2 \cdot 10^{-10}$
ボーア磁子	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	9.274 009 68(20) yJ/T	$2.2 \cdot 10^{-8}$
古典電子半径	$r_e = e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e c^2$	2.817 940 3267(27) fm	$9.7 \cdot 10^{-10}$
コンプトン波長	$\lambda_C = h/m_e c$	2.426 310 2389(16) pm	$6.5 \cdot 10^{-10}$
電子	$\lambda\!\!\!^{-}_c = \hbar/m_e c = r_e/\alpha$	0.386 159 268 00(25) pm	$6.5 \cdot 10^{-10}$
ボーア半径 [a]	$a_\infty = r_e/\alpha^2$	52.917 721 092(17) pm	$3.2 \cdot 10^{-10}$
回転量子	$h/2m_e$	$3.636\,947\,5520(24) \cdot 10^{-4}$ m^2/s	$6.5 \cdot 10^{-10}$
陽電子の比電荷	e/m_e	$1.758\,820\,088(39) \cdot 10^{11}$ C/kg	$2.2 \cdot 10^{-8}$
サイクロトロン周波数	$f_c/B = e/2\pi m_e$	27.992 491 10(62) GHz/T	$2.2 \cdot 10^{-8}$
電子			
電子の磁気モーメント	μ_e	$-9.284\,764\,30(21) \cdot 10^{-24}$ J/T	$2.2 \cdot 10^{-8}$
	μ_e/μ_B	−1.001 159 652 180 76(27)	$2.6 \cdot 10^{-13}$
	μ_e/μ_N	$-1.838\,281\,970\,90(75) \cdot 10^3$	$4.1 \cdot 10^{-10}$
電子のg因子	g_e	−2.002 319 304 361 53(53)	$2.6 \cdot 10^{-13}$
ミューオン–電子質量比	m_μ/m_e	206.768 2843(52)	$2.5 \cdot 10^{-8}$
ミューオン磁気モーメント	μ_μ	$-4.490\,448\,07(15) \cdot 10^{-26}$ J/T	$3.4 \cdot 10^{-8}$
ミューオンg因子	g_μ	−2.002 331 8418(13)	$6.3 \cdot 10^{-10}$
陽子–電子質量比	m_p/m_e	1 836.152 672 45(75)	$4.1 \cdot 10^{-10}$
陽子の比電荷	e/m_p	$9.578\,833\,58(21) \cdot 10^7$ C/kg	$2.2 \cdot 10^{-8}$
陽子のコンプトン波長	$\lambda_{C,p} = h/m_p c$	1.321 409 856 23(94) fm	$7.1 \cdot 10^{-10}$
核磁子	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$5.050\,783\,53(11) \cdot 10^{-27}$ J/T	$2.2 \cdot 10^{-8}$
陽子の磁気モーメント	μ_p	$1.410\,606\,743(33) \cdot 10^{-26}$ J/T	$2.4 \cdot 10^{-8}$
	μ_p/μ_B	$1.521\,032\,210(12) \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-9}$
	μ_p/μ_N	2.792 847 356(23)	$8.2 \cdot 10^{-9}$
陽子の磁気回転比	$\gamma_p = 2\mu_p/\hbar$	$2.675\,222\,005(63) \cdot 10^8$ Hz/T	$2.4 \cdot 10^{-8}$
陽子のg因子	g_p	5.585 694 713(46)	$8.2 \cdot 10^{-9}$
中性子–電子質量比	m_n/m_e	1 838.683 6605(11)	$5.8 \cdot 10^{-10}$
中性子–陽子質量比	m_n/m_p	1.001 378 419 17(45)	$4.5 \cdot 10^{-10}$
中性子のコンプトン波長	$\lambda_{C,n} = h/m_n c$	1.319 590 9068(11) fm	$8.2 \cdot 10^{-10}$
中性子の磁気モーメント	μ_n	$-0.966\,236\,47(23) \cdot 10^{-26}$ J/T	$2.4 \cdot 10^{-7}$
	μ_n/μ_B	$-1.041\,875\,63(25) \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$
	μ_n/μ_N	−1.913 042 72(45)	$2.4 \cdot 10^{-7}$
シュテファン–ボルツマン定数	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	56.703 73(21) nW/m^2K^4	$3.6 \cdot 10^{-6}$
ウィーンの変位定数	$b = \lambda_{max} T$	2.897 7721(26) mmK	$9.1 \cdot 10^{-7}$
		58.789 254(53) GHz/K	$9.1 \cdot 10^{-7}$
電子ボルト	eV	$1.602\,176\,565(35) \cdot 10^{-19}$ J	$2.2 \cdot 10^{-8}$
ビットからエントロピーへの変換定数	$k \ln 2$	10^{23} bit = 0.956 994 5(9) J/K	$9.1 \cdot 10^{-7}$
TNTのエネルギー容量		3.7 to 4.0 MJ/kg	$4 \cdot 10^{-2}$

a. 無限大質量の原子核に対して.

私たちの環境について有用な性質を以下の表に示す.

TABLE 13 天文学についての定数

量	記号	値
太陽年 1900 [a]	a	31 556 925.974 7 s
太陽年 1994	a	31 556 925.2 s
平均恒星日	d	$23^h56'4.090\,53''$
地球–太陽間平均距離 [b]		149 597 870.691(30) km
天文単位 [b]	AU	149 597 870 691 m
光年, ユリウス年を基準にしたもの [b]	al	9.460 730 472 5808 Pm
パーセク	pc	30.856 775 806 Pm = 3.261 634 al
地球の質量	$M_{♁}$	$5.973(1) \cdot 10^{24}$ kg
地心重力定数	GM	$3.986\,004\,418(8) \cdot 10^{14}$ m^3/s^2
地球のgravitational length	$l_{♁} = 2GM/c^2$	8.870 056 078(16) mm
地球の赤道半径 [c]	$R_{♁\mathrm{eq}}$	6378.1366(1) km
地球の極半径 [c]	$R_{♁\mathrm{p}}$	6356.752(1) km
赤道–極の距離 [c]		10 001.966 km (average)
地球の扁平率 [c]	$e_{♁}$	1/298.25642(1)
地球の平均密度	$\rho_{♁}$	5.5 Mg/m^3
地球の年齢	$T_{♁}$	4.50(4) Ga = 142(2) Ps
地球の標準重力	g	9.806 65 m/s^2
地球の標準大気圧	p_0	101 325 Pa
月の半径	$R_{☾\,\mathrm{v}}$	地球方向に1738 km
月の半径	$R_{☾\,\mathrm{h}}$	他の2方向に 1737.4 km
月の質量	$M_{☾}$	$7.35 \cdot 10^{22}$ kg
月の平均距離 [d]	$d_{☾}$	384 401 km
近地点での 月の距離 [d]		典型的には 363 Mm, 過去の最低359 861 km
遠地点での月の距離 [d]		典型的には 404 Mm, 過去の最高406 720 km
月の角サイズ [e]		平均 0.5181° = 31.08′, 最小 0.49°, 最大 0.55°
月の平均密度	$\rho_{☾}$	3.3 Mg/m^3
月の表面重力	$g_{☾}$	1.62 m/s^2
月の大気圧	$p_{☾}$	10^{-10} Pa (夜) から 10^{-7} Pa (昼)
木星の質量	$M_{♃}$	$1.90 \cdot 10^{27}$ kg
木星の半径, 赤道	$R_{♃}$	71.398 Mm
木星の半径, 極	$R_{♃}$	67.1(1) Mm
太陽から木星までの平均距離	$D_{♃}$	778 412 020 km
木星の表面重力	$g_{♃}$	24.9 m/s^2
木星の大気圧	$p_{♃}$	20 kPa から 200 kPa
太陽の質量	$M_{☉}$	$1.988\,43(3) \cdot 10^{30}$ kg
太陽のgravitational length	$2GM_{☉}/c^2$	2.953 250 08(5) km
太陽中心の重力定数	$GM_{☉}$	$132.712\,440\,018(8) \cdot 10^{18}$ m^3/s^2

TABLE 13 (続き)天文学の定数

量	記号	値
太陽の光度	$L_\odot$	384.6 YW
太陽の赤道半径	$R_\odot$	695.98(7) Mm
太陽の角サイズ		0.53° 平均; 7月4日最小 (遠日点) 1888″, 1月4日最大 (近日点) 1952″
太陽の平均密度	$\rho_\odot$	1.4 Mg/m^3
太陽の平均距離	AU	149 597 870.691(30) km
太陽の年齢	$T_\odot$	4.6 Ga
太陽の速度 銀河系を中心とした回転	$v_{\odot g}$	220(20) km/s
太陽の速度 宇宙背景に対する	$v_{\odot b}$	370.6(5) km/s
太陽の表面重力	$g_\odot$	274 m/s^2
太陽の光球下部圧力	$p_\odot$	15 kPa
銀河系中心までの距離		8.0(5) kpc = 26.1(1.6) kal
銀河系の年齢		13.6 Ga
銀河系のサイズ		*c.* 10^{21} m or 100 kal
銀河系の質量		10^{12}太陽質量, *c.* $2 \cdot 10^{42}$ kg
わかっているもっとも遠い銀河団	SXDF-XCLJ 0218-0510	$9.6 \cdot 10^9$ al

a. 春分点から春分点までで定義された定数. かつては, 秒を定義するのに使用された(π秒は約10億秒である.) 1990年の値は0.7 s短く, これは 0.2 ms/a程度ゆっくりなったことになる. (なぜか.) 1年の長さの時間的変化の実験的公式がある.

Challenge 409 s Ref 403

b. 地球と太陽の平均距離の精度は30 mしかないとは驚くべきだが, これは, 20年以上にわたり, ヴァイキング軌道船と火星着陸機から送られてきた信号を平均して得られている. 国際天文学連合 (IAU) は, 地球–太陽平均距離と天文単位 *(AU)* を区別している. 後者は固定したきちんとした長さとして定義されている. また, 光年は, IAUにより, きちんとした数字で定義されている. 詳細はwww.iau.org/public/measuringを参照のこと.

c. 地球の形を最も精密に記述しているのは世界測地系 (WGS) である. 最新のものは1984年に作られた. ウェブサイトwww.wgs84.comに, その背景と詳細を全体的に紹介してある. 国際地理学連合 (IGU) は2000年にそれを修正した. ここで紹介している半径や扁平度は'mean tide system'.に対するものである. これらは'zero tide system'やその他のシステムと約0.7 mだけ違っている. この違いは科学そのものである.

d. 中心から中心までで測定. ここで紹介した月までの精密な距離は, www.fourmilab.ch/earthview/moon_ap_per.htmlを見てください. 惑星については, www.fourmilab.ch/solar/solar.htmlや同じサイトの別のページを見てください.

e. 角度は以下のように定義されている: 1 degree = 1° = π/180 rad, 1 (first) minute = 1′ = 1°/60, 1 second (minute) = 1″ = 1′/60.

大規模スケールの自然の性質を次の表に示す. (宇宙の任意の性質が列挙されているかどうかを決められるだろうか.)

Challenge 410 s

TABLE 14 宇宙 についての定数

量	記号	値
宇宙定数	Λ	*c.* $1 \cdot 10^{-52}$ m^{-2}

TABLE 14 (続き) 宇宙についての定数.

量	記号	値
宇宙の年齢[a]	t_0	$4.333(53)\cdot 10^{17}$ s = $13.8(0.1)\cdot 10^{9}$ a
(一般相対論を用い, 膨張を考え, 時空から決定されたもの)		
宇宙の年齢[a]	t_0	$3.5(4)\cdot 10^{17}$ s = $11.5(1.5)\cdot 10^{9}$ a以上
(量子論を用い, 銀河や恒星を考え, 物質から決定されたもの)		
ハッブルパラメータ[a]	H_0	$2.3(2)\cdot 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1} = 0.73(4)\cdot 10^{-10}\,\mathrm{a}^{-1}$
	$= h_0\cdot 100\,\mathrm{km/s\,Mpc} = h_0\cdot 1.0227\cdot 10^{-10}\,\mathrm{a}^{-1}$	
換算ハッブルパラメータ[a]	h_0	0.71(4)
減速パラメータ[a]	$q_0 = -(\ddot{a}/a)_0/H_0^2$	−0.66(10)
宇宙の地平線までの距離[a]	$d_0 = 3ct_0$	$40.0(6)\cdot 10^{26}$ m = 13.0(2) Gpc
宇宙のトポロジー		10^{26} mまでは明らか
空間の次元数		10^{26} mの距離までについては3
臨界密度	$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$	$h_0^2\cdot 1.878\,82(24)\cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg/m^3}$
(宇宙について)		$= 0.95(12)\cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg/m^3}$
(全)密度パラメータ[a]	$\Omega_0 = \rho_0/\rho_c$	1.02(2)
バリオン密度パラメータ[a]	$\Omega_{B0} = \rho_{B0}/\rho_c$	0.044(4)
Cold dark matter density parameter[a]	$\Omega_{CDM0} = \rho_{CDM0}/\rho_c$	0.23(4)
ニュートリノ密度パラメータ[a]	$\Omega_{\nu 0} = \rho_{\nu 0}/\rho_c$	0.001 to 0.05
ダークエネルギー密度パラメータ[a]	$\Omega_{X0} = \rho_{X0}/\rho_c$	0.73(4)
ダークエネルギー状態パラメータ	$w = p_X/\rho_X$	−1.0(2)
バリオン質量	m_b	$1.67\cdot 10^{-27}$ kg
バリオン数密度		$0.25(1)\,/\mathrm{m^3}$
発光物質密度		$3.8(2)\cdot 10^{-28}\,\mathrm{kg/m^3}$
宇宙の恒星	n_s	$10^{22\pm 1}$
宇宙のバリオン	n_b	$10^{81\pm 1}$
マイクロ波背景温度[b]	T_0	2.725(1) K
宇宙の光子	n_γ	10^{89}
光子エネルギー密度	$\rho_\gamma = \pi^2 k^4/15T_0^4$	$4.6\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg/m^3}$
光子数密度		$410.89\,/\mathrm{cm^3}$ or $400\,/\mathrm{cm^3}(T_0/2.7\,\mathrm{K})^3$
密度のゆら�ぎの振幅	$\sqrt{S}$	$5.6(1.5)\cdot 10^{-6}$
重力波の振幅	$\sqrt{T}$	$< 0.71\sqrt{S}$
8 Mpcでの質量のゆらぎ	σ_8	0.84(4)
スカラー指標	n	0.93(3)
スカラー指標のランニング	$\mathrm{d}n/\mathrm{d}\ln k$	−0.03(2)
プランク長	$l_{Pl} = \sqrt{\hbar G/c^3}$	$1.62\cdot 10^{-35}$ m
プランク時間	$t_{Pl} = \sqrt{\hbar G/c^5}$	$5.39\cdot 10^{-44}$ s
プランク質量	$m_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G}$	21.8 µg
現在までの時間点数[a]	t_0/t_{Pl}	$8.7(2.8)\cdot 10^{60}$
時空点数	$N_0 = (R_0/l_{Pl})^3\cdot$	$10^{244\pm 1}$
(地平線内部)[a]	(t_0/t_{Pl})	
地平線内部の質量	M	$10^{54\pm 1}$ kg

a. 指標0は現在の値を示す.

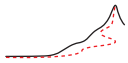
b. 輻射は宇宙が380 000歳で, 温度が約3000 Kの頃のもの. 銀河 生成に至ったゆらぎΔT_0は, 現在, 約$16 \pm 4\,\mu K = 6(2) \cdot 10^{-6}\, T_0$である.

Page 215

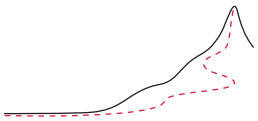
役に立つ数字

Ref. 303

π	$3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\,69399\,37510_5$
e	$2.71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995_9$
γ	$0.57721\,56649\,01532\,86060\,65120\,90082\,40243\,10421\,59335\,93992_3$
$\ln 2$	$0.69314\,71805\,59945\,30941\,72321\,21458\,17656\,80755\,00134\,36025_5$
$\ln 10$	$2.30258\,50929\,94045\,68401\,79914\,54684\,36420\,76011\,01488\,62877_2$
$\sqrt{10}$	$3.16227\,76601\,68379\,33199\,88935\,44432\,71853\,37195\,55139\,32521_6$



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net



チャレンジのヒントと解

Challenge 1, page 10: 細かくて, きつい要求でも気後れせず連絡ください. 次版を改良するのに役立ちます.

Challenge 2, page 13: 円錐とか双極面でも, 視点をうまく選ぶと, すべての方向をまっすぐ見通せるようになる. 従って, 平面性を確認するには, 物体をひっくりかえしたり, 位置をずらしてみる必要がある. 平面性確認の最良の方法は, 物体全体をおおう径を持つコヒーレントな光の出射ビームと入射ビームの干渉を利用することである. *もし, 干渉図形の干渉縞が真直ぐであれば, 表面は平面である.

Vol. III, page ??

Challenge 3, page 14: 無限に対する有限値の比は, 依然として, 無限である. 無限は単位として使えない.

Challenge 4, page 15: 第2の測定で, イオが影に入る時刻は第1の測定から予想される時刻より約1000 s遅れる. 地球は木星とイオから約$3 \cdot 10^{11}$ m遠ざかっているので, 光の速度値が得られる.

Challenge 5, page 15: 光行差を補正するには, 望遠鏡を地球の運動と平行方向に傾け, 視差を補正するには垂直方向に傾ける.

Challenge 6, page 15: Figure 4の上の図は式 (1) で*tan*を使用することを示唆している. 一方, 下の図では*sin*である. しかし, 両方とも速度がcより大きな速度にならないようになっていないため, 誤りである. 平方根を持つような正確な公式は相対論的な計算からもとまる.

Challenge 7, page 16: 図を描けば示せる. 月と太陽は直角になっている. 月が半月になっているということは月との角度が直角になっている. 従って, 簡単ではないが, 観測者のところでの角度がも非常に直角に近いので, 距離の比は決定できる.

Challenge 8, page 16: アポロとルノホートの月面飛行において, 月面にキャッツアイが置かれた. キャッツアイは, 望遠鏡を通して月面に向け送られた35 psのレーザー光パルスを反射する. その往復時間から月までの距離がわかる. もちろん, ばらつきがあり, 絶対距離は高精度ではわからない. 大気の厚さが誤差の最も大きな要因である. ウェブサイトwww.csr.utexas.edu/mlrsとilrs.gsfc.nasa.govを参照のこと.

Page 156

Challenge ??, page ??: フィゾーは約8.6 km離れた鏡を使用した. 図が示すように, 光がある歯のところを通り抜けて出てゆき, 次の歯の所で戻ってくる時, はめば歯車の歯を数え回転速度を測定すればよい.

Challenge 9, page 18: シャッター時間は$T = l/c$より短くなければいけない. つまり, 30 ps未満である. このようなシャッターは, 固体ではない気体シャッターである. シャッターは, 撮影されるパルスとタイミングを合わせた (図に示されている) 赤光パルスをトリガにする. 使用した気体のようなある種のガスでは, 強い光が割れ目を作り透明になる. このシャッターと変わったトリガ技術の詳細は, 執筆者の論文を参照してください. もっと速いシャッターは第VI巻を見てください. page ??.

* 一般的に, 2本の光ビーム, または, 任意の2つの波が一定の位相差, 一定の周波数を持っているとき, その光, または, 波はコヒーレントであるという. コヒーレントな場合, 干渉を起こすことができる.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

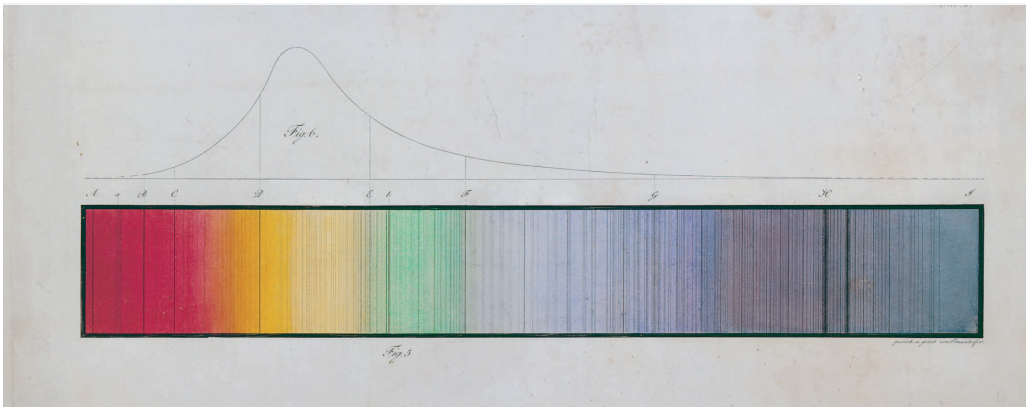


FIGURE 122 フラウンホーファーにより発表されたフラウンホーファー線l (© Fraunhofer Gesellschaft)

Challenge 10, page 18: カメラを水平に移動させて, 稲光の写真を撮りさえすればよい. 稲光がいくつかの放電から構成されていることがわかり, 全体から稲光は光よりずっとゆっくりしていることが示せる.

もし, 稲光が光と同じくらい高速に動いていたとしたら, ドップラー効果のため, 見る角度によって色が違って見えるであろう. 近くの稲光であれば上から下に向かって色が変わるであろう.

Challenge 11, page 19: 最も高速なランプはミューオンのような素粒子で, かすかな光ではあるが, 光子を放出して崩壊する. また, 高速の物質ジェットを放出する恒星も存在し, その速度は光の速度に匹敵するほど高速である.

Challenge 12, page 20: ニュートリノの速度は9桁まで光速と同じである. これは超新星爆発の際, ニュートリノと光は, 170 000光年の距離を, 12秒以内の差というほぼ同じくらいの時間で, 旅してきたことからわかる.

Ref. 40

Challenge 13, page 21: やってくる光の方向を, 到着前に見極めることはできない. ...お疲れさまです.

Challenge 15, page 24: 他の可能性は無意味であることを示すのがベストである.

Challenge 16, page 24: 光が反射される事象の空間座標は $c(k^2 - 1)T/2$ で, 時間座標は $(k^2 + 1)T/2$ である. その比は v になるはずである. k について解けば結果を得る.

Challenge 18, page 27: 電波, 紫外線, ガンマ線なども止めることはできない. かつては, ニュートリノもその可能性があると考えられていたが, 質量を持つことがわかり, 原理的に止めることができる. 重力も止められない.

Challenge 20, page 29: $\lambda_R/\lambda_S = \gamma$.

Challenge 21, page 30: 明るい赤 (650 nm) から緑 (550 nm) に変えるには, $v = 0.166c$が必要である.

Challenge 22, page 31: いわゆる, 水素のライマン-αのシフトのような, スペクトル線のシフトを測定する. この線は自由電子が水素原子に捕獲 (または吸収) されたりする時に, 放出 (または吸収) されるもので, 有名なフラウンホーファー線の一つである.

Vol. IV, page ??

Challenge 23, page 31: 速度は

$$v/c = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \tag{295}$$

で, 与えられ, 観測者に向かってくるときには, $v(z = -0.1) = 31\,\mathrm{Mm/s} = 0.1c$ で, 観測者から遠ざかるときには, $v(z = 5) = 284\,\mathrm{Mm/s} = 0.95c$ となる.

赤方偏移値6は $0.96c$ の速度に対応し, 一般相対論の節で見るように, 私たちから遠ざかる遠方の物体で見られる. 大きな赤方偏移は地球から極端に遠いところでのみ観測され, さらに遠くなると, もっと速くなる. 赤方偏移6は数十億光年の距離にある.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 24, page 31: 質量の大きな物体に対し静止している離れた観測者に対してはドップラー効果は見られない. ほかの場合では, ドップラー効果は観測できるが, それは曲げられらことによるものではない.

Challenge 25, page 31: 音の速度は, 観測者の速度に対し, 不変ではない. その結果, 音のドップラー効果は, 互いに動いている観測者にとって, 時間は同じであることが, 測定の範囲内で確認できる.

Challenge 28, page 33: カラーテレビのブラウン管内 (普通, 30 kVという, 白黒テレビより高い電圧が使われていた) では, 電子は $v/c \approx \sqrt{2 \cdot 30/511}$, つまり $v \approx 0.3c$ と計算できる.

Challenge 29, page 34: もし, 想像できるなら, 出版するとよい. 読者はよろこんでその話を聞くだろう.

Challenge 31, page 34: ??の章で示したように, 自然界においては, 観測者不変と極限値の存在の関係は一般に成り立っている. しかし, 完全で, 厳密な説明はまだである. わかったら, 出版すると良い.

Vol. VI, page ??

Challenge 34, page 37: もし, 光の速度がすべての観測者にとって同じであれば, (時空が平坦である限り) 別の観測者くらべて, より静止していることを主張する観測者はいない. そんなことを主張できる電気力学, 力学やその他の物理分野を基にした観測はない.

Challenge 38, page 39: 人類は粒子加速器の中で達成している. 自然は最大エネルギーの宇宙線の中でこの値は見出されている.

Challenge 40, page 39: 他の観測者とっては, page 25のFigure 10を書き換えることで示すことができる.

Challenge 41, page 40: 多様体は4次元空間のような振る舞いをするので, 事象の集合は多様体のように振る舞う. 任意の出発点の周りには無限に多くの点があり, 距離は私たちが慣れ親しんだ振る舞いをし, 制限も慣れ親しんだ振る舞いをする. 違うのは次元が1つ追加され, 距離の定義に符号が入ることである. もう少し, きちんと言えば, リーマン多様体である.

Challenge 42, page 41: 無限は, 明らかに開いている. この多様体はゴムからなっていて, 球に巻き付けられていると想像すると, トポロジー的に同じであることを示せる.

Challenge 43, page 42: 光円錐は変化せず, 従って, 因果関係も変化しない.

Challenge 46, page 42: こんなことになると, 慣性観測者の周辺の, 未来, 過去, その他の領域への時空の分離が, もはや, 成り立たなくなってしまい, (他の観測者から見ると) 未来が過去に影響を与えることになってしまう.

Challenge 52, page 45: 双子のパラドクスを理解する最良の方法は, 各双子が一定間隔で相手に時間信号を送り, 自分の時計と相手側の時計それがどのように見えるかを時空図に描いてみることである. いくつかの例をFigure 123に示す. これらの時間信号は送り手側の年齢を表していると考えられる. この旅の間で, 双子の片方の送り出す信号の数が, もう片方より多いことが直接わかるだろう.

Challenge 53, page 45: 単純な推論により予想される比 $(1/2)^{(6.4/2.2)} = 0.13$.

Challenge 54, page 46: $v = 0.9952c$の時間遅れの因子は10.2で, これから, 固有時間は0.62 µsとなる. 従って, 特殊相対論から予想される比は $(1/2)^{(0.62/2.2)} = 0.82$ となる.

Challenge 56, page 46: 第1の時計から光の信号を第2の時計に送り, 送り返す. 送ってから戻ってくるまでの時間を測り, 反射の時刻を調べる. これを繰り返す. Figure 10参照.

Challenge 58, page 47: 今のところ実験方法はない.

Challenge 59, page 47: ヒント: 見える方向の違いを考えろ.

Challenge 61, page 48: ヒント: '剛性'の定義について注意しろ.

Challenge 63, page 48: 出発した導体がギャップを通過している時は, 伝導体の長さがギャップの長さより短いと, 速度がいくらであっても, ライトは点灯しない. 奇妙なのは, 導体の系では両端が接触していても, 高速になるとライトが点灯しないことになる.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

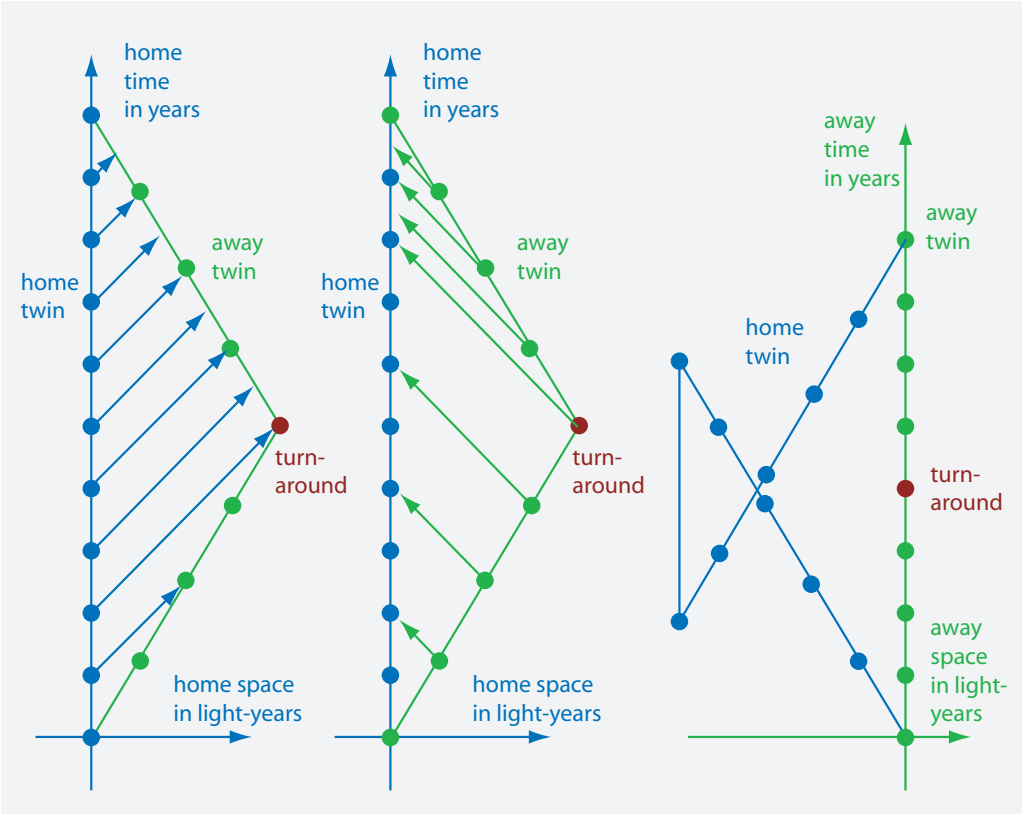


FIGURE 123 双子のパラドクス: (左と中央) 自宅にいる方の双子の慣性系における, 双子間で信号を送り双子両者で時計の時刻合わせ と (右) 旅にでた慣性系ではない双子の記述.

この場合, 接触している電池に信号を送るための十分な時間がなく, 電流が流れ始めないからだ.

電流が c のオーダーの速度 u で流れるとする. Dirk Van de Moortelが示したように, 伝導体の長さ l とギャップ長 d が $l/d < \gamma(u+v)/u$ の時は, ランプが消灯する. 参考文献参照.

ギャップとランプに近づいてくる伝導体に対しては, 状況は異なっている. S.R. Madhu Raoにより指摘されているように, ギャップより伝導体が短くてもランプはずっと点灯し続ける.

この議論はなぜ白熱するのだろうか. この問題は物理的でないと (不当に) 黙殺しようとする人もいる. マックスウェルの方程式が必要と言う人もいる. 長い伝導体ではこのon/offの答えは正確な速度値に依存するので, 問題自身が馬鹿げているという人もいる. しかし, これは実際にあり得る状況である.

Challenge 64, page 49: ロープは切れる. 加速している車では, この本で後述するように, 距離は変化する.

Challenge 65, page 49: 潜水艦は沈む. 高速になった潜水艦は運動エネルギーがその重量に追加されるので, 高速潜水艦も沈む. 短縮効果は, 船長が言うように, 潜水艦を軽くするが, その量は少しだけである. 全体の重量は, 上方向を正にとると, $F = -mg(\gamma - 1/\gamma)$ になる.

Challenge 66, page 49: 高速の潜水艦は, 水との摩擦により, 瞬時に溶けるであろう. そうでないとしたら, 脱出速度を超えてしまい, 地球から飛び出してしまうだろう. ほかにも, とんでもない効果があるだろう.

Challenge 67, page 51: 相対論的速度で動くネックレスは確かに短くなるだろうが, その短縮が測定されるだけで, 写真に撮ることはできない. 相対論的速度では, 測定された

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

真珠は偏平な楕円体である. 球は球に変形されない. 観測されたネックレスは重なった楕円体になる.

Challenge 68, page 52: できない. 考えてみてください.

Challenge 70, page 52: 正しい. 山頂より谷にいるほうが老化の速度はおそい. しかし, 時間のそれ自身の感じ方としては同じである. 白髪になる理由ではない. その出現時期は遺伝子の話であって, そうなる時期はそれぞれの場所では同じである.

Challenge 71, page 53: 特定の点に観測者を置くことはできない. 固有速度は観測者, 時計を持つことのできる実体に対してのみ定義できる. 像はそうではない.

Challenge 72, page 54: これを示すには平面幾何を使えばよい.

Challenge 73, page 54: 非常におもしろいことに, 頭を適切に動かすと, 地平線は簡単に光速より速く動く. 虹の端も同じである.

Challenge 75, page 58: 距離を決定し, かつ, 時計を同時刻化するためには光が必要である. したがって, ある点から別の点に移動する光の速度それだけを測定する方法はない. そのため, 戻りの運動を含める必要がある. しかし, 一方向の速度についての説明もされている. (math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/experiments.html参照) これまで行われた一方向の光速についての実験は, 双方向速度に等しい等方速度と矛盾しない. ところが, 一方向の光速が非等方で, 双方向の速度と違っているという理論は排除する実験もない. この理論は双方向の光速は, あらゆる慣性系で等方的であるが, 一方向の速度はある特定の「エーテル」系においてのみ等方的であるというものだ. これらの理論では, いずれも, あらゆる慣性系で, ゆっくり動いている時計では, 非等方な一方向な高速の非等方性を補償する効果があるというものである. これらの理論の特殊相対論からの違いを実験的に示すことはできない. したがって, 実質上, 一方向の光速が測定され, 一定である. しかし, 小さな別の選択も残っている. ,

一方向と双方向の光速の微妙さは, 長い間, 議論の的になってきた. 一方向と双方向の光速の違いをもたす2以外の因子についても, すべての観測者にとって双方向速度 c に保たれている限り, 実験的に排除することができない.

Ref. 16 光の一方向速度についての多くの実験について, Zhang.が解説, 議論を行っている. 彼は, サマリーの171ページで, 一方向の光速は光源に依存しないと述べている. しかし, Ref. 73 それが双方向速度と等しいことを示す実験はない. さらに, すべての「一方向」の実験は, 実は, 隠された「双方向」の実験であるとも言っている (彼の文献の150ページ参照) .

2004年, Hans Ohanianは, 普通でない一方向の速度が動力学にどう影響するかを議論Ref. 74 することで, 問題は解決されることを示した. 普通でない一方向の光速により, (コリオリ加速度やコリオリ力のように) 擬加速度と擬力が導入されることを彼は示した. これらの擬加速度と擬力は観測されていないため, 一方向光速は双方向の光速と同じである.

つまり, ここでは, 一方向の光速の問題は考慮する必要はない.

Challenge 76, page 59: たとえば, 鏡に衝突する光子に対しては, この式は成り立たない.

Challenge 77, page 59: 相対論を用いてると, チャレンジ**??**の主張は完全なものにできる.

Challenge 82, page 62: Figure 40の下の衝突はエネルギー保存からの直接の結果を示す. 上の図は, 運動量保存 $\gamma mv = \Gamma MV$ とエネルギー保存 $(\gamma + 1)m = \Gamma M$ から始めた結果を示す.

Challenge 91, page 67: Figure 44の左の方では, 少し反時計方向に曲がっている.

Challenge 92, page 68: 相対論的電荷間の衝突では, エネルギーの一部が光として放出され, その結果, 粒子は有効にエネルギーを失う.

Challenge 93, page 69: すべての量の間の関係がわかっている, 今, おそらく無いであろう. しかし, 自分で確かめてみても, わからないだろう. 自然界の最大力は, 80年以上, 知られずにいた後に発見されたことに言及しておきたい.

Challenge 95, page 72: 4元ベクトル U' と U を書き下し, v' を v と相対座標速度 V の関数として表せ. そして, 変数名を付け直せ.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 96, page 72: 質量を持つ物体の運動の例は無い. 光の波の運動としては, page 78で述べたように, ヌルの4元位相速度とヌルの4元群速度があるだけである.

Challenge 100, page 75: 質量をもたない粒子のような, 超相対論的粒子では$E = pc$となる.

Challenge 101, page 75: ヒント:1つの粒子の静止系で, P_1とP_2を調べよ.

Challenge 103, page 76: 定義$\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$と静止質量保存力にたいして成り立つ関係$\boldsymbol{KU} = 0 = \boldsymbol{Fv} - \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$を用いよ.

Challenge 105, page 76: この話はpage 99で述べられている.

Challenge 109, page 78: この問題は*Ehrenfest*パラドクスと呼ばれている. これについては多くの出版物がある. がんばって, 説明してください!

Challenge 110, page 78: はい, このような物体はありえる. サーチライト効果とドップラー効果により見えなくなる. 物体の一部, すなわち, 観測者から離れて回転している領域は非常に暗くなるだろう.

Challenge 112, page 78: もし, 回転粒子が磁気モーメントを持っていたとしたら, 非一様磁場を通じてそれが伝わり, 磁気モーメントが方向を変えているかどうかが観測できる.

Challenge 114, page 78: しない.

Challenge 115, page 78: 相対論的角運動量とその美しい効果については, K. Y. Bliokh & F. Nori, *Relativistic Hall Effect*, Physical Review Letters **108**, p. 120403, 2012, を参照のこと. プレプリントはarxiv.org/abs/1112.5618にある.

Challenge 118, page 79: 周波数についての関係は, 位相の定義からもとまる.

Challenge 121, page 80: プランクがアインシュタインをベルリンに招待した時, アインシュタインの答えを確認した.

Challenge 136, page 87: 燃料に含まれているエネルギーはバイクの静止質量をc^2倍したものになるだろう. 燃料がエネルギー以上の質量をもっていたら, 大問題だ.

Challenge 138, page 88: 一般相対論の所で議論したように, 一定加速度と重力とは, 同じ効果を示す.

Challenge 141, page 90: はい, 正しい.

Challenge 142, page 90: 平面のように平坦である.

Challenge 143, page 90: メリーゴーランドの中心向きの加速度は存在するが, 地平線は現れない.

Challenge 145, page 91: はい. ただし, この効果は最小で, 太陽の位置に依存する. 実際, ある高さでは白のものが, 別の高さでは白でなくなる.

Challenge 147, page 92: 局所的には, 光はいつも速度cで運動する.

Challenge 148, page 92: 地球から離れると, gは減少してゆき, ほとんどのところで, 実効的にはゼロになる.

Challenge 151, page 93: 前述の参照文献に示されるように, 条件 $l\gamma^3 a \leqslant c^2$ により, 制限される.

Challenge 153, page 94: そうだ.

Challenge 154, page 94: そうだ. $\Delta f\ \Delta t \geqslant 1$ とし, $\Delta l = c/\Delta f\ \Delta a = c/\Delta t$ を代入せよ.

Challenge 156, page 96: この問題について調べたかのような出版物は多くあるが, それが不可能なことを知っている物理学者もちゃんといる. 光速のばらつきを測定することは一方向の光速を測定することと近い所がある. つまり, できないということだ. しかし, このトピックについての議論は白熱しており, 当分, 沈静化しそうもない.

Challenge 157, page 98: 重力の逆二乗則は最大速度の原理に従ったものではない. 運動する観測者になった時に, それがどう変わるかは明らかではない.

Challenge 158, page 103: 力や仕事率の極限を超えたということを耳にしたら, 連絡をください.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 159, page 103: 光速で動く表面, または, プランク長より小さい精度で定義されている表面を考えろ.

Challenge 160, page 108: 曲がった表面では, 平行性も維持されない. これを忘れると, 奇妙な結論に行きつく. 人類は月に行っていないという証明では, そこで撮影された写真を議論する時, このことを無視している.

Challenge 161, page 110: もし, 見つけたら, 発表して, それを送ってほしい.

Challenge 163, page 115: これは面倒である. 4元ベクトルの相対論的変換を単純に適用すると極限より大きな力が生じてしまう. しかし, どんな場合でも, 地平線が生じて極限より大きな値を観測できないようにしてしまう.

Challenge 164, page 115: もし, そうなら, 発表して, それを送ってください.

Challenge 165, page 117: たとえば, 宇宙のすべての原子を光速に近い速度で通す複雑な形状の表面を想像することが可能である. しかし, 同時にそれらの点を運動する観測者をすべての点に配置できないので, このような面は物理的でない.

Challenge 167, page 118: 新しいソースはどこにも出現させられない. 新しい仕事率源は, 宇宙の出現前に存在していた輻射を変換することから結果的に生じるものである.

Challenge 168, page 118: 多くの人は極限をまだ信じていいない. 従って, 反例の提示やパラドックスは公表する価値がある.

Challenge 171, page 122: もしそうなら, 発表して, それを送ってください.

Challenge 174, page 124: もし, そうなら, 発表して, それを送ってください.

Challenge 176, page 127: 上方向に加速される.

Challenge 177, page 127: 日常生活では, (a)地球表面は平坦と考えることができ, (b)垂直方向の曲率の効果は無視でき, (c) 横方向の長さの効果も無視できる.

Challenge 181, page 128: 強力なバス, 加速が$2\,\mathrm{m/s^2}$である. 100 m加速した時の, 周波数の相対変化は $2.2 \cdot 10^{-15}$ である.

Challenge 182, page 129: その通り. 光の吸収と放出は損失無くエネルギーは質量に変換させる.

Challenge 185, page 129: 光ビームにとって, いずれの場合においても, 質量が運動方向と反対方向に「落下」するような環境で記述される. 例えば, 霧で地球も列車も見えないような場合には, 実験で今どちらの状況にあるかを決定することはできない. また, 観測者が箱の中に閉じ込められている場合には, 一定加速か一定重力かを見分ける方法はない (観測者のサイズは無視できる場合にそうなる) .

Challenge 189, page 131: 長さは光速かける時間である. もし, 時間が高さとともに変化するなら, 長さもそうなる.

Challenge 191, page 131: 両方とも地球の中心に向かって落下する. 軌道を回る粒子も自由落下状態にある. 本文中にあるように, それらの相対距離は変化する.

Challenge 194, page 134: この様なグラフは, 4または5次元でなければならない.

Challenge 195, page 134: 高さとともに時間が変化する実験は, この場合にも, 使用できる.

Challenge 196, page 135: 回転によるエネルギーは, 問題中の他のすべてのエネルギーと比べると無視できる.

Challenge 206, page 140: 異なった核子, 異なった原子核, 異なった原子, 異なった分子の全質量に対する結合エネルギーの割合はそれぞれ異なっている.

Challenge 208, page 142: 自由落下時, 容器と水は相対的に静止している.

Challenge 209, page 142: 装置を落下させてみましょう. 弾性ゴムは十分強いのでボールをカップに引き込む. M. T. Westra, *Einsteins verjaardagscadeau*, Nederlands tijdschrift voor natuurkunde **69**, p. 109, April 2003.参照. 本来の装置は, ゴムにバネもつけられていた.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 210, page 143: すでに述べた椅子とテーブルは別にして, 重要な反重力装置はサスペンダー, ベルト, プラスチックバッグ.

Challenge 212, page 143: 量は同じ.

Challenge 213, page 143: その通り. 重力下では, 双子のうち, 高い方が年を取るのに多くかかる. その年齢差は高さとともに変化し, 無限の高さではゼロになる.

Challenge 214, page 143: 質量流の制限値は $c^3/4G$ である.

Challenge 215, page 143: ちがう. コンベアベルトを列車内に作りこむことができる.

Challenge 216, page 143: バネばかりを用いて, 振動時間を測定すればいい. それから, 質量を算出する. NASAは, これをBMMD (body mass measuring device) とよんでいる. 第1巻に写真を載せている.

Vol. I, page ??

Challenge 217, page 143: 約30分後にリンゴは壁に当たる.

Challenge 220, page 144: 曲がった光路や変化する光の速度をもちいたアプローチでは地平線を正しく記述することはできない.

Challenge 221, page 144: 最小の角運動量 $\hbar$ を用いると, 約100 Tmとなる.

Challenge 222, page 144: できない. ビームの回折のためにできない. また, 量子論では不可能である. 光子のような質量のない粒子の結合状態は安定ではない.

Challenge 224, page 146: 軌道半径は地球の半径の4.2倍で, 毎日*c*. 38 µsとなる.

Challenge 225, page 146: 正直言って, この実験は矛盾がある. 原子サイズなどの自然界の他の性質の定数は, たとえ, *G*に依存していようと, 一定であることを仮定しているからだ. 詳細は, page 279に記事を参照してください.

Challenge 226, page 146: もちろん, 特別な測定装置がないと検出できないような他の空間次元が存在する可能性はある. 例えば, 日常生活では到達できないようなエネルギー領域に隠された次元は現れる可能性はある.

Challenge 227, page 146: この微小な効果については, Ohanianの教科書Ref. 106の147ページを参照してください.

Challenge 249, page 160: 負の質量は存在しないので. gravioelectric場は中性化されない. 一方, 電場はファラデーケージを持つ導体の周辺では中性化できる.

Challenge 252, page 161: 答えを探すには, 電磁気学的な類推を考えるとよい.

Challenge 261, page 168: 地球上の異なった地点での重力波検出器のところで, 地球を横切るパルスのタイミングを測定する必要がある.

Challenge 236, page 151: 日食の際にこれを行った.

Challenge 263, page 169: ない. 静電場が不可能なのと同じ理由による.

Challenge 266, page 171: 線は固有の曲率を持つことはできない. トーラスは実際は曲がっている. 開いて一枚の紙にすることができないからだ.

Challenge 271, page 173: 1枚の紙から作ることはできない. 曲率はあらゆるところでゼロではない.

Challenge 288, page 181: アインシュタインテンソルのトレースはリッチスカラーの負である. つまり, リッチテンソルのトレースの負をとったものである.

Challenge 292, page 183: エネルギーの概念は宇宙に対しては意味をもたない. この概念は物理システムに対してだけ定義できるもので, 宇宙自身についてはできない. page ??も参照してください.

Challenge 299, page 189: 実際, 一般相対論では, 重力エネルギーは空間に局在化させることはできない. これは, 相互作用から期待されたり, 要求されるものとちがう.

Challenge 310, page 192: 南に向かう馬車の誤差は幾何学的位相, によるもの, つまり, 3次元内で平衡移動を行う場合にはどんな時でも生じるものである. フーコーの振り子を回転させるのも同じ効果である. 平行移動はフェルミ・ウォーカー移動と呼ばれることもある. 幾何学的位相については光学の巻で詳しく説明する.

Vol. III, page ??

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 314, page 194: European Space Agencyはこれを調べている. 加わってみよう.

Challenge 317, page 205: 弱い形態の太陽ジェットが存在したら好機到来である. もっとも, 検出はそう簡単ではない. (銀河系にジェットが存在するかどうかについては, 2006年以降, この教科書でも触れてきたが, 2010年に発見された.)

Challenge 319, page 210: 二つの量が違うと信じるなら, 古典物理と一般相対論についてのあなたの考えを外挿させることで, 地平線の向こうといった根拠のない領域に導かれるかもしれない. どの地平線でも, 量子効果が強く, 古典的な外挿は正しくない.

Challenge 320, page 210: 数ミリメートル..

Challenge 321, page 210: 小麦粉の粉粒の直径が150 µmで, 密度が1000 kg/m^{3}とすると, 小麦粉1kgに約566000000個の粒がある. 典型的な銀河は10^{11}の恒星を含んでいるから, 177 kgの小麦粉に対応する.

Challenge 322, page 210: 速度は, 普通, ライマン-アルファ線をみて, ドップラー効果を用いて測定する. 距離を説明するのはもっと難しい. 距離の測定はそれ自身科学で, 銀河系内の恒星の距離を測るのか, 銀河までなのか, クエーサまでまでの距離を測るのかにより異なってくる. 天文学や天体物理学の本にはもっと書いてある.

Challenge 323, page 211: page 218のチャレンジを見よ.

Challenge 325, page 218: そのウサギは, 他のすべてのウサギが自分から遠ざかっているように見える.

Challenge 332, page 223: 冬, 森の中に立って, 地平線を見てください. 森の奥ならば, あらゆる方向に木の幹が見えるだろう. 適当な深さの森の所なら, 地平線が見えることがあるだろう.

Challenge 345, page 239: 誤り. これは, 一見, 自然を厳密に記述しているように見えるが, 現実とは無関係な非科学的な主張や確信に至る道筋の例である.

Challenge 346, page 239: これも誤り. この主張は完全に思い込みである.

Challenge 348, page 241: 宇宙は外から観測することはできない. 従って, 状態の性質もない.

Challenge 359, page 250: 地平線では, 光は上に上がっていけない.

Challenge 382, page 263: 静電場が電荷から生じるように起きる. 両方とも, 横方向の場は現れず, 縦方向の場だけが現れる. 量子論からもっと深い理由がわかる. 横方向の自由場を形成する実輻射粒子は, 脱出速度のため, ブラックホールからは出てこれない. しかし, 仮想粒子なら, 速度が光速の制限を受けないため, 出てくることができる. すべての縦方向の静場は仮想粒子により作られる. さらに, もう一つ理由がある. 古典場ならブラックホールから出てこれる. 外側の観測者にとって, ブラックホールを構成するものはすべて絶えず落ちてゆき, 地平線を実際, 横切れる構成物質はない. 従って, 場の源となるものにたどり着けないわけではない.

Challenge 386, page 264: 説明がすべてを語っている. 像としての印象は, ミュンヘンの「ドイツ博物館」のブラックホールの間に行けばわかるだろう.

Challenge 388, page 264: ブラックホールは物質の崩壊から生じることもある. 一方, ブラックホールは曲がった地平線として見える.

Challenge 390, page 265: これまでのところ, 類推からの結果は観測にあっているように見える. 従って, 夜の空はブラックホールの地平線であると主張できそうだ. 一方で, 問題の片が付いたわけではないし, 傑出した物理学者はこのような類推を好まない. このことは, 自然は極端に大きなスケールと極端に小さな長さのスケール間で対称性があるのかどうかという疑問に関連している. このトピックは最後の巻で展開させる.

Challenge 394, page 268: 鏡を使うどんな装置も, 電気力学が必要である. 電気力学がなかったら鏡は不可能である.

Challenge 396, page 272: 普通の距離を $r_{he} = R^2_{Earth}/r$ に従って変換すると, 空洞地球は正しい. これは, 空洞球の中心に向かい小さくなってゆく作用量子を示唆している. 単純と言う以外の理由で, ある記述がべつのものより好ましいことはない.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Challenge 400, page 284: 質量はエネルギーの量を測るものである. 「質量の2乗」は無意味である.

Challenge ??, page ??: もっとも変化の量が大きいのはたぶん質量であろう. 1 eV/c^2の接頭辞も使用されるし, 宇宙の全質量の接頭辞使用される. 後者は前者の約 10^{90} 大きい.

Challenge 403, page 287: $n-1$ の公式ほうがよく合う. なぜか.

Challenge 406, page 288: そんなことはない. 精密すぎて意味がない. これは, ガウス分布の性質を説明するために示しただけである. 実際の測定結果はこの数字が意味するほど精密にガウス分布にはなっていない.

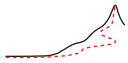
Challenge 407, page 289: 約0.3 m/s. 0.33 m/sでもないし, 0.333 m/sでもないし, 3がもっとたくさん並ぶわけでもない.

Challenge 409, page 294: 時間の2乗でゆっくりなってゆく. ゆっくりなる割合が, 前の値に加わってゆくからである.

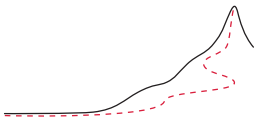
Vol. VI, page ?? Challenge 410, page 294: 宇宙の性質の一部をリストアップしただけである. 最後の巻で述べるように宇宙自身には性質はない.

Challenge 411, page 332: 和の2つの項のそれぞれの無理性で用いたのと同様の方法で解けるかもしれないが, まだ, だれも見つけていない.

Challenge 412, page 332: 発見されるべきことが, 現代数学, 特に, トポロジー, 数論, 代数幾何にはまだたくさんある.



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net



参考文献

> 一人の男が図書館の半分をひっくり返して
> 一冊の本を作った.
>
> Samuel Johnson*

1 Aristotle, *On sense and the sensible*, section 1, part 1, 350 bce. Cited in Jean-Paul Dumont, *Les écoles présocratiques*, Folio Essais, Gallimard, p. 157, 1991. Cited on page 13.

2 The original Latin text of Descartes' letter, dated 22 August 1634, can be read online on gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k20740j/f419.image. Cited on page 15.

3 Anonyme, *Demonstration touchant le mouvement de la lumière trouvé par M. Römer de l'Academie Royale des Sciences*, Journal des Scavans pp. 233–236, 1676. An English summary is found in O. C. Römer, *A demonstration concerning the motion of light*, Philosophical Transactions of the Royal Society **136**, pp. 893–894, 1677. You can read the two papers at dbhs.wvusd.k12.ca.us/webdocs/Chem-History/Roemer-1677/Roemer-1677.html. Cited on page 15.

4 F. Tuinstra, *Römer and the finite speed of light*, Physics Today **57**, pp. 16–17, December 2004. Cited on page 15.

5 The history of the measurement of the speed of light can be found in chapter 19 of the text by Francis A. Jenkins & Harvey E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill, New York, 1957. Cited on page 15.

6 On the way to perform such measurements, see Sydney G. Brewer, *Do-it-yourself Astronomy*, Edinburgh University Press, 1988. Kepler himself never measured the distances of planets to the Sun, but only *ratios* of planetary distances. The parallax of the Sun from two points of the Earth is at most 8.79″; it was first measured in the eighteenth century. Cited on page 16.

7 Aristarchus of Samos, *On the sizes and the distances of the Sun and the Moon*, *c.* 280 bce, in Michael J. Crowe, *Theories of the World From Antiquity to the Copernican Revolution*, Dover, 1990. Cited on page 16.

8 J. Frercks, *Creativity and technology in experimentation: Fizeau's terrestrial determination of the speed of light*, Centaurus **42**, pp. 249–287, 2000. See also the beautiful website on reconstrutions of historical science experiments at www.uni-oldenburg.de/histodid/forschung/nachbauten. Cited on page 17.

9 The way to make pictures of light pulses with an ordinary photographic camera, without any electronics, is described by M. A. Duguay & A. T. Mattick, *Ultrahigh speed photography of picosecond light pulses and echoes*, Applied Optics **10**, pp. 2162–2170, 1971. The picture on page 17 is taken from it. Cited on page 17.

10 You can learn the basics of special relativity with the help of the web; the simplest and clearest introduction is part of the Karlsruhe physics course, downloadable at www.

* Samuel Johnson (1709–1784), 有名な英国の詩人, 知識人.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

physikdidaktik.uni-karlsruhe.de. You can also use the physics.syr.edu/research/relativity/RELATIVITY.html web page as a starting point; the page mentions many of the English-language relativity resources available on the web. Links in other languages can be found with search engines. Cited on page 19.

11 Observations of gamma-ray bursts show that the speed of light does not depend on the lamp speed to within one part in 10^{20}, as shown by the well-known paper by B. E. Schaefer, *Severe limits on variations of the speed of light with frequency*, Physical Review Letters **82**, pp. 4964–4966, 1999, preprint at arxiv.org/abs/astro-ph/9810479. Cited on pages 19, 308, and 310.

12 Among others, the independence of the speed of light from its frequency has been tested with the radiation emitted by the famous Crab pulsar, with light emitted by electrons in the Stanford Linear Accelerator Center, and, most impressively, with a bright gamma-ray burst observed in 2009. In this gamma-ray burst, after travelling for ten thousand million years, photons of frequencies that differed by a factor $3 \cdot 10^{10}$ – gamma rays and visible light – still arrived within less than a second from each other. See A.A. Abdo & al., (Fermi GBM/LAT collaborations) *Testing Einstein's special relativity with Fermi's short hard gamma-ray burst GRB090510*, preprint at arxiv.org/abs/0908.1832. No citations.

13 See, e.g., C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, revised edition, Cambridge University Press, 1993. See also Ref. 24. Cited on pages 19 and 23.

14 The discussions using binary stars are W. de Sitter, *A proof of the constancy of the speed of light*, Proceedings of the Section of the Sciences – Koninklijke Academie der Wetenschappen **15**, pp. 1297–1298, 1913, W. de Sitter, *On the constancy of the speed of light*, Proceedings of the Section of the Sciences – Koninklijke Academie der Wetenschappen **16**, pp. 395–396, 1913, W. de Sitter, *Ein astronomischer Beweis für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*, Physikalische Zeitschrift **14**, p. 429, 1913, W. de Sitter, *Über die Genauigkeit, innerhalb welcher die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Quelle behauptet werden kann*, Physikalische Zeitschrift **14**, p. 1267, 1913, For a more recent version, see K. Brecher, *Is the speed of light independent of the velocity of the source?*, Physics Letters **39**, pp. 1051–1054, Errata 1236, 1977. Cited on page 19.

15 The strong limits from observations of gamma-ray bursts were explored in Ref. 11.

Measuring the light speed from rapidly moving stars is another possible test; see the previous reference. Some of these experiments are not completely watertight; a speculation about electrodynamics, due to Ritz, maintains that the speed of light is c only when measured with respect to the source; the light from stars, however, passes through the atmosphere, and its speed might thus be reduced to c.

The famous experiment with light emitted from rapid pions at CERN is not subject to this criticism. It is described in T. Alväger, J. M. Bailey, F. J. M. Farley, J. Kjellman & I. Wallin, *Test of the second postulate of relativity in the GeV region*, Physics Letters **12**, pp. 260–262, 1964. See also T. Alväger & al., *Velocity of high-energy gamma rays*, Arkiv für Fysik **31**, pp. 145–157, 1965.

Another precise experiment at extreme speeds is described by G. R. Kalbfleisch, N. Baggett, E. C. Fowler & J. Alspector, *Experimental comparison of neutrino, anti-neutrino, and muon velocities*, Physical Review Letters **43**, pp. 1361–1364, 1979. Cited on page 19.

16 An overview of experimental results is given in Yuan Zhong Zhang, *Special Relativity and its Experimental Foundations*, World Scientific, 1998. Cited on pages 20, 27, 35, 46, 61, 301, and 311.

17 The beginning of the modern theory of relativity is the famous paper by Albert Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17**, pp. 891–921, 1905. It still well worth reading, and every physicist should have done so. The same can be said of the famous paper, probably written after he heard of Olinto De Pretto's idea, found in Albert Einstein, *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem*

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Energieinhalt abhängig?, Annalen der Physik **18**, pp. 639–641, 1905. See also the review Albert Einstein, *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **4**, pp. 411–462, 1907. These papers are now available in many languages. A later, unpublished review is available in facsimile and with an English translation as Albert Einstein, Hanoch Gutfreund, ed., *Einstein's 1912 Manuscript on the Theory of Relativity*, George Braziller, 2004. Cited on pages 20, 23, and 69.

18 Jean van Bladel, *Relativity and Engineering*, Springer, 1984. Cited on page 20.

19 Albert Einstein, *Mein Weltbild*, edited by Carl Selig, Ullstein Verlag, 1998. Cited on page 22.

20 Albrecht Fölsing, *Albert Einstein – eine Biographie*, Suhrkamp p. 237, 1993. Cited on pages 23 and 37.

21 Einstein's beautiful introduction, almost without formulae, is Albert Einstein, *Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Vieweg, 1917 and 1997. For a text with all required mathematics, see Albert Einstein, *The Meaning of Relativity*, Methuen, 1921 and 1956. The posthumous edition also contains Einstein's last printed words on the theory, in the appendix. See also the German text Albert Einstein, *Grundzüge der Relativitätstheorie*, Springer, 1921 expanded 1954, and republished 2002, which also contains the relevant mathematics. Cited on page 23.

22 Julian Schwinger, *Einstein's Legacy*, Scientific American, 1986. Edwin F. Taylor & John A. Wheeler, *Spacetime Physics – Introduction to Special Relativity*, second edition, Freeman, 1992. See also Nick M. J. Woodhouse, *Special Relativity*, Springer, 2003. Cited on pages 23 and 79.

23 Wolfgang Rindler, *Relativity – Special, General and Cosmological*, Oxford University Press, 2001. A beautiful book by one of the masters of the field. Cited on pages 23 and 78.

24 R. J. Kennedy & E. M. Thorndike, *Experimental establishment of the relativity of time*, Physical Review **42**, pp. 400–418, 1932. See also H. E. Ives & G. R. Stilwell, *An experimental study of the rate of a moving atomic clock*, Journal of the Optical Society of America **28**, pp. 215–226, 1938, and **31**, pp. 369–374, 1941. For a modern, high-precision versions, see C. Braxmeier, H. Mller, O. Pradl, J. Mlynek, A. Peters & S. Schiller, *New tests of relativity using a cryogenic optical resonator*, Physical Review Letters **88**, p. 010401, 2002. The newest result is in P. Antonini, M. Okhapkin, E. Gkl & S. Schiller, *Test of constancy of speed of light with rotating cryogenic optical resonators*, Physical Review A **71**, p. 050101, 2005, preprint at arxiv.org/abs/gr-qc/0504109, and the subsequent arxiv.org/abs/physics/0510169. See also P. Antonini, M. Okhapkin, E. Gkl & S. Schiller, *Reply to ''Comment on 'Test of constancy of speed of light with rotating cryogenic optical resonators' ''*, Physical Review A **72**, p. 066102, 2005, preprint at arxiv.org/abs/physics/0602115. Cited on pages 23 and 308.

25 The slowness of the speed of light inside the Sun is due to the frequent scattering of photons by solar matter. The most serious estimate is by R. Mitalas & K. R. Sills, *On the photon diffusion time scale for the Sun*, The Astrophysical Journal **401**, pp. 759–760, 1992, They give a photon escape time of 0.17 Ma, an average photon free mean path of 0.9 mm, an average speed of 0.97 cm/s and a speed at the centre that is ten times smaller. Cited on page 24.

26 L. Vestergaard Hau, S. E. Harris, Z. Dutton & C. H. Behroozi, *Light speed reduction to 17 meters per second in an ultracold atomic gas*, Nature **397**, pp. 594–598, 1999. See also C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi & L. Vestergaard Hau, *Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses*, Nature **409**, pp. 490–493, 2001, and the comment E. A. Cornell, *Stopping light in its track*, **409**, pp. 461–462, 2001. However, despite the claim, the light pulses have *not* been halted. Cited on page 24.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

27 The method of explaining special relativity by drawing a few lines on paper is due to Hermann Bondi, *Relativity and Common Sense: A New Approach to Einstein*, Dover, New York, 1980. See also Dierck-Ekkehard Liebscher, *Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal*, Akademie-Verlag Berlin, 1991. Cited on page 24.

28 S. Reinhardt & al., *Test of relativistic time dilation with fast optical clocks at different velocities*, Nature Physics **3**, pp. 861–864, 2007. Cited on page 26.

29 Rod S. Lakes, *Experimental limits on the photon mass and cosmic vector potential*, Physical Review Letters **80**, pp. 1826–1829, 1998. A maximum photon mass of 10^{-47} kg was also deduced from gamma-ray bursts in the paper Ref. 11. Cited on page 27.

30 F. Tuinstra, *De lotgevallen van het dopplereffect*, Nederlands tijdschrift voor natuurkunde **75**, p. 296, August 2009. Cited on page 27.

31 R. W. McGowan & D. M. Giltner, *New measurement of the relativistic Doppler shift in neon*, Physical Review Letters **70**, pp. 251–254, 1993. Cited on page 29.

32 R. Lambourne, *The Doppler effect in astronomy*, Physics Education **32**, pp. 34–40, 1997, Cited on page 31.

33 D. Kiefer & al., *Relativistic electron mirrors from nanoscale foils for coherent frequency upshift to the extreme ultraviolet*, Nature Communications **4**, p. 1763, 2013. The exploration of relativistic charge systems promises interesting results and applications in the coming decade. Cited on page 31.

34 The present record for clock synchronization seems to be 1 ps for two clocks distant 3 km from each other. See A. Valencia, G. Scarcelli & Y. Shih, *Distant clock synchronization using entangled photon pairs*, Applied Physics Letters **85**, pp. 2655–2657, 2004, or arxiv.org/abs/quant-ph/0407204. Cited on page 31.

35 J. Frenkel & T. Kontorowa, *Über die Theorie der plastischen Verformung*, Physikalische Zeitschrift der Sowietunion **13**, p. 1, 1938. F. C. Frank, *On the equations of motion of crystal dislocations*, Proceedings of the Physical Society A **62**, pp. 131–134, 1949. J. Eshelby, *Uniformly moving dislocations*, Proceedings of the Physical Society A **62**, pp. 307–314, 1949. See also G. Leibfried & H. Dietze, Zeitschrift für Physik **126**, p. 790, 1949. A general introduction can be found in A. Seeger & P. Schiller, *Kinks in dislocation lines and their effects in internal friction in crystals*, Physical Acoustics **3A**, W. P. Mason, ed., Academic Press, 1966. See also the textbooks by Frank R. N. Nabarro, *Theory of Crystal Dislocations*, Oxford University Press, 1967, or J. P. Hirth & J. Lothe, *Theory of Dislocations*, McGraw Hill, 1968. Cited on page 32.

36 This beautiful graph is taken from Z. G. T. Guiragossian, G. B. Rothbart, M. R. Yearian, R. Gearhart & J. J. Murray, *Relative velocity measurements of electrons and gamma rays at 15 GeV*, Physical Review Letters **34**, pp. 335–338, 1975. Cited on page 32.

37 A provocative attempt to explain the lack of women in physics in general is made in Margaret Wertheim, *Pythagoras' Trousers – God, Physics and the Gender Wars*, Fourth Estate, 1997. Cited on page 33.

38 To find out more about the best-known crackpots, and their ideas, send an email to majordomo@zikzak.net with the one-line body 'subscribe psychoceramics'. Cited on page 33.

39 The accuracy of Galilean mechanics was discussed by Simon Newcomb already in 1882. For details, see Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, 1972. Cited on page 33.

40 The speed of neutrinos is the same as that of light to 9 decimal digits. This is explained by Leo Stodolsky, *The speed of light and the speed of neutrinos*, Physics Letters B **201**, p. 353, 1988. An observation of a small mass for the neutrino has been published by the

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Japanese Super-Kamiokande collaboration, in Y. Fukuda & al., *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Physical Review Letters **81**, pp. 1562–1567, 1998. The newer results published by the Canadian Sudbury Neutrino Observatory, as Q.R. Ahmad & al., *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Physical Review Letters **89**, p. 011301, 2002, also confirm that neutrinos have a mass in the 1 eV region. Cited on pages 34 and 298.

41 B. Rothenstein & G. Eckstein, *Lorentz transformations directly from the speed of light*, American Journal of Physics **63**, p. 1150, 1995. See also the comment by E. Kapuścik, *Comment on ''Lorentz transformations directly from the speed of light'' by B. Rothenstein and G. Eckstein*, American Journal of Physics **65**, p. 1210, 1997. Cited on page 35.

42 See e.g. the 1922 lectures by Lorentz at Caltech, published as H. A. Lorentz, *Problems of Modern Physics*, edited by H. Bateman, Ginn and Company, page 99, 1927. Cited on page 35.

43 Max Born, *Die Relativitätstheorie Einsteins*, Springer, 2003, a new, commented edition of the original text of 1920. Cited on page 35.

44 A. A. Michelson & E. W. Morley, *On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether*, American Journal of Science (3rd series) **34**, pp. 333–345, 1887. Michelson published many other papers on the topic after this one. Cited on page 36.

45 The newest result is Ch. Eisele, A. Yu. Nevsky & S. Schiller, *Laboratory test of the isotropy of light propagation at the* 10^{-17} *level*, Physics Review Letters **103**, p. 090401, 2009. See also the older experiment at S. Schiller, P. Antonini & M. Okhapkin, *A precision test of the isotropy of the speed of light using rotating cryogenic cavities*, arxiv.org/abs/physics/0510169. See also the institute page at www.exphy.uni-duesseldorf.de/ResearchInst/WelcomeFP.html. Cited on page 36.

46 H. A. Lorentz, *De relative beweging van de aarde en dem aether*, Amst. Versl. **1**, p. 74, 1892, and also H. A. Lorentz, *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*, Amst. Proc. **6**, p. 809, 1904, or Amst. Versl. **12**, p. 986, 1904. Cited on page 39.

47 A general refutation of such proposals is discussed by S. R. Mainwaring & G. E. Stedman, *Accelerated clock principles*, Physical Review A **47**, pp. 3611–3619, 1993. Experiments on *muons* at CERN in 1968 showed that accelerations of up to $10^{20}\,\mathrm{m/s^2}$ have no effect, as explained by D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, Addison-Wesley, 1972, or by J. Bailey & al., Il Nuovo Cimento **9A**, p. 369, 1972. Cited on page 40.

48 W. Rindler, *General relativity before special relativity: an unconventional overview of relativity theory*, American Journal of Physics **62**, pp. 887–893, 1994. Cited on page 40.

49 Steven K. Blau, *Would a topology change allow Ms. Bright to travel backward in time?*, American Journal of Physics **66**, pp. 179–185, 1998. Cited on page 42.

50 On the 'proper' formulation of relativity, see for example D. Hestenes, *Proper particle mechanics*, Journal of Mathematical Physics **15**, pp. 1768–1777, 1974. See also his numerous other papers, his book David Hestenes, *Spacetime Algebra*, Gordon and Breach, 1966, and his webpage modelingnts.la.asu.edu. A related approach is W. E. Baylis, *Relativity in introductory physics*, preprint at arxiv.org/abs/physics/0406158. Cited on page 44.

51 The simple experiment to take a precise clock on a plane, fly it around the world and then compare it with an identical one left in place was first performed by J. C. Hafele & R. E. Keating, *Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains*, Science **177**, pp. 166–167, and *Around-the-world atomic clocks: observed relativistic time gains*, pp. 168–170, 14 July 1972. See also Ref. 16. Cited on page 44.

52 A readable introduction to the change of time with observers, and to relativity in general, is Roman U. Sexl & Herbert Kurt Schmidt, *Raum-Zeit-Relativitt*, 2. Auflage, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991. Cited on page 44.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

53 Most famous is the result that moving muons stay younger, as shown for example by D. H. Frisch & J. B. Smith, *Measurement of the relativistic time dilation using μ-mesons*, American Journal of Physics **31**, pp. 342–355, 1963. For a full pedagogical treatment of the twin paradox, see E. Sheldon, *Relativistic twins or sextuplets?*, European Journal of Physics **24**, pp. 91–99, 2003. Cited on page 45.

54 Paul J. Nahin, *Time Machines – Time Travel in Physics, Metaphysics and Science Fiction*, Springer Verlag and aip Press, second edition, 1999. Cited on page 45.

55 The first muon experiment was B. Rossi & D. B. Hall, *Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum*, Physical Review **59**, pp. 223–228, 1941. 'Mesotron' was the old name for muon. Cited on page 45.

56 J. Bailey & al., *Final report on the CERN muon storage ring including the anomalous magnetic moment and the electric dipole moment of the muon, and a direct test of relativistic time dilation*, Nuclear Physics B **150**, pp. 1–75, 1979. Cited on page 46.

57 A. Harvey & E. Schucking, *A small puzzle from 1905*, Physics Today, pp. 34–36, March 2005. Cited on page 46.

58 Search for 'fuel' and 'relativistic rocket' on the internet. Cited on page 46.

59 W. Rindler, *Length contraction paradox*, American Journal of Physics **29**, pp. 365–366, 1961. For a variation without gravity, see R. Shaw, *Length contraction paradox*, American Journal of Physics **30**, p. 72, 1962. Cited on page 48.

60 H. van Lintel & C. Gruber, *The rod and hole paradox re-examined*, European Journal of Physics **26**, pp. 19–23, 2005. Cited on page 48.

61 See the clear discussion by C. Iyer & G. M. Prabhu, *Differing observations on the landing of the rod into the slot*, American Journal of Physics **74**, pp. 998–1001, 2006, preprint at arxiv.org/abs/0809.1740. Cited on page 48.

62 This situation is discussed by G. P. Sastry, *Is length contraction paradoxical?*, American Journal of Physics **55**, 1987, pp. 943–946. This paper also contains an extensive literature list covering variants of length contraction paradoxes. Cited on page 48.

63 S. P. Boughn, *The case of the identically accelerated twins*, American Journal of Physics **57**, pp. 791–793, 1989. Cited on page 52.

64 J. M. Supplee, *Relativistic buoyancy*, American Journal of Physics 57 **1**, pp. 75–77, January 1989. See also G. E. A. Matsas, *Relativistic Arquimedes law for fast moving bodies and the general-relativistic resolution of the 'submarine paradox'*, Physical Review D **68**, p. 027701, 2003, or arxiv.org/abs/gr-qc/0305106. Cited on page 49.

65 The distinction was first published by J. Terrell, *Invisibility of Lorentz contraction*, Physical Review **116**, pp. 1041–1045, 1959, and R. Penrose, *The apparent shape of a relativistically moving sphere*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **55**, pp. 137–139, 1959. Cited on page 51.

66 G. R. Rybicki, *Speed limit on walking*, American Journal of Physics **59**, pp. 368–369, 1991. Cited on page 53.

67 The first examples of such astronomical observations were provided by A.R. Whitney & al., *Quasars revisited: rapid time variations observed via very-long-baseline interferometry*, Science **173**, pp. 225–230, 1971, and by M.H. Cohen & al., *The small-scale structure of radio galaxies and quasi-stellar sources at 3.8 centimetres*, Astrophysical Journal **170**, pp. 207–217, 1971. See also T. J. Pearson, S. C. Unwin, M. H. Cohen, R. P. Linfield, A. C. S. Readhead, G. A. Seielstad, R. S. Simon & R. C. Walker, *Superluminal expansion of quasar 3C 273*, Nature **290**, pp. 365–368, 1981. An overview is given in J. A. Zensus & T. J. Pearson, editors, *Superluminal radio sources*, Cambridge University Press, 1987. Another measurement, using very long baseline interferometry with radio waves on jets emitted from a binary star (thus not a quasar), was shown on the cover of Nature: I. F. Mirabel & L. F. Rodrguez, *A superluminal source in the galaxy*,

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Nature **371**, pp. 46–48, 1994. A more recent example was reported in Science News **152**, p. 357, 6 December 1997.

Pedagogical explanations are given by D. C. Gabuzda, *The use of quasars in teaching introductory special relativity*, American Journal of Physics **55**, pp. 214–215, 1987, and by Ref. 112 on pages 89-92. Cited on page 55.

68 A somewhat old-fashioned review paper on tachyons mentioning the doubling issue, on pages 52 and 53, is E. Recami, Rivista del Nuovo Cimento *Classical tachyons and possible applications*, **9**, pp. 1–178, 1986. It also discusses a number of paradoxes. A film claiming to show a flying tachyon can be found in Wikipedia. Cited on page 55.

69 O. M. Bilaniuk & E. C. Sudarshan, *Particles beyond the light barrier*, Physics Today **22**, pp. 43–51, 1969, and O. M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande & E. C. G. Sudarshan, *'Meta' relativity*, American Journal of Physics **30**, pp. 718–723, 1962. See also E. Recami, editor, *Tachyons, Monopoles and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1978. Cited on page 56.

70 J. P. Costella, B. H. J. McKellar, A. A. Rawlinson & G. J. Stephenson, *The Thomas rotation*, American Journal of Physics **69**, pp. 837–847, 2001. Cited on page 56.

71 Planck wrote this in a letter in 1908. Cited on page 57.

72 See for example S. S. Costa & G. E. A. Matsas, *Temperature and relativity*, preprint available at arxiv.org/abs/gr-qc/9505045. Cited on page 57.

73 One of the latest of these debatable experiments is T. P. Krisher, L. Maleki, G. F. Lutes, L. E. Primas, R. T. Logan, J. D. Anderson & C. M. Will, *Test of the isotropy of the one-way speed of light using hydrogen-maser frequency standards*, Physical Review D **42**, pp. 731–734, 1990. Cited on pages 58 and 301.

74 H. C. Ohanian, *The role of dynamics in the synchronization problem*, American Journal of Physics **72**, pp. 141–148, 2004. Cited on pages 58 and 301.

75 R. C. Tolman & G. N. Lewis, *The principle of relativity and non-Newtonian mechanics*, Philosophical Magazine **18**, pp. 510–523, 1909, and R. C. Tolman, *Non-Newtonian mechanics: the mass of a moving body*, Philosophical Magazine **23**, pp. 375–380, 1912. Cited on page 59.

76 S. Rainville, J. K. Thompson, E. G. Myers, J. M. Brown, M. S. Dewey, E. G. Kessler, R. D. Deslattes, H. G. Brner, M. Jentschel, P. Mutti & D. E. Pritchard, *World year of physics: a direct test of $E = mc^2$*, Nature **438**, pp. 1096–1097, 2005. No citations.

77 This information is due to a private communication by Frank DiFilippo; part of the story is given in F. DiFilippo, V. Natarajan, K. R. Boyce & D. E. Pritchard, *Accurate atomic masses for fundamental metrology*, Physical Review Letters **73**, pp. 1481–1484, 1994. These measurements were performed with Penning traps; a review of the possibilities they offer is given by R. C. Thompson, *Precision measurement aspects of ion traps*, Measurement Science and Technology **1**, pp. 93–105, 1990. The most important experimenters in the field of single particle levitation were awarded the Nobel Prize in 1989. One of the Nobel Prize lectures can be found in W. Paul, *Electromagnetic traps for neutral and charged particles*, Reviews of Modern Physics **62**, pp. 531–540, 1990. Cited on page 65.

78 J. L. Synge, *Relativity: The Special Theory*, North-Holland, 1956, pp. 208–213. More about antiparticles in special relativity can be found in J. P. Costella, B. H. J. McKellar & A. A. Rawlinson, *Classical antiparticles*, American Journal of Physics **65**, pp. 835–841, 1997. See also Ref. 96. Cited on page 66.

79 A. Papapetrou, *Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der relativistischen Mechanik*, Praktika Acad. Athenes **14**, p. 540, 1939, and A. Papapetrou, *Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der Diracschen Theorie*, Praktika Acad. Athenes **15**, p. 404, 1940. See also M. H. L. Pryce, *The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connexion with*

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

the quantum theory of elementary particles, Proceedings of the Royal Society in London, A **195**, pp. 62–81, 1948. Cited on page 67.

80 The references preceding Einstein's $E = c^2m$ are: S. Tolver Preston, *Physics of the Ether*, E. & F.N. Spon, 1875, J. H. Poincaré, *La théorie de Lorentz et le principe de réaction*, Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles **5**, pp. 252–278, 1900, O. De Pretto, *Ipotesi dell'etere nella vita dell'universo*, Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti **tomo LXIII**, parte 2, pp. 439–500, Febbraio 1904, F. Hasenöhrl, Berichte der Wiener Akademie **113**, p. 1039, 1904, F. Hasenöhrl, *Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern*, Annalen der Physik **15**, pp. 344–370, 1904, F. Hasenöhrl, *Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern – Berichtigung*, Annalen der Physik **16**, pp. 589–592, 1905. Hasenöhrl died in 1915, De Pretto in 1921. All these papers were published before the famous paper by Albert Einstein, *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?*, Annalen der Physik **18**, pp. 639–641, 1905. Cited on page 69.

81 Umberto Bartocci, *Albert Einstein e Olinto De Pretto: la vera storia della formula più famosa del mondo*, Ultreja, 1998. Cited on page 69.

82 For a clear overview of the various sign conventions in general relativity, see the front cover of the text by Misner, Thorne and Wheeler, Ref. 91. We use the gravitational sign conventions of the text by Ohanian and Ruffini, Ref. 106. Cited on page 71.

83 A jewel among the textbooks on special relativity is the booklet by Ulrich E. Schröder, *Spezielle Relativitätstheorie*, Verlag Harri Deutsch, 1981. Cited on page 72.

84 G. Stephenson & C. W. Kilmister, *Special Relativity for Physicists*, Longmans, London, 1965. See also W. N. Matthews, *Relativistic velocity and acceleration transformations from thought experiments*, American Journal of Physics **73**, pp. 45–51, 2005, and the subsequent J. M. Lévy, *A simple derivation of teh Lorentz transformation and of the accompanying velocity and acceleration changes*, American Journal of Physics **75**, pp. 615–618, 2007. Cited on page 73.

85 A readable article showing a photocopy of a letter by Einstein making this point is Lev B. Okun, *The concept of mass*, Physics Today, pp. 31–36, June 1989. The topic is not without controversy, as the letters by readers following that article show; they are found in Physics Today, pp. 13–14 and pp. 115–117, May 1990. The topic is still a source of debates. Cited on page 75.

86 Christian Møller, *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, 1952, 1972. This standard textbook has been translated in several languages. No citations.

87 The famous *no-interaction theorem* states that there is no way to find a Lagrangian that only depends on particle variables, is Lorentz invariant *and* contains particle interactions. It was shown by D. G. Currie, T. F. Jordan & E. C. G. Sudarshan, *Relativistic invariance and Hamiltonian theories of interacting particles*, Review of Modern Physics **35**, pp. 350–375, 1963. Cited on page 76.

88 P. Ehrenfest, *Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie*, Physikalische Zeitschrift **10**, pp. 918–928, 1909. Ehrenfest (incorrectly) suggested that this meant that relativity cannot be correct. A good modern summary of the issue can be found in M. L. Ruggiero, *The relative space: space measurements on a rotating platform*, arxiv.org/abs/gr-qc/0309020. Cited on page 77.

89 R. J. Low, *When moving clocks run fast*, European Journal of Physics **16**, pp. 228–229, 1995. Cited on pages 83 and 84.

90 E. A. Desloge & R. J. Philpott, *Uniformly accelerated reference frames in special relativity*, American Journal of Physics **55**, pp. 252–261, 1987. Cited on pages 85 and 86.

91 The impossibility of defining rigid coordinate frames for non-uniformly accelerating observers is discussed by Charles Misner, Kip Thorne & John A. Wheeler, *Grav-*

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

itation, Freeman, p. 168, 1973. Cited on pages 85 and 314.

92 R. H. Good, *Uniformly accelerated reference frame and twin paradox*, American Journal of Physics **50**, pp. 232–238, 1982. Cited on pages 86, 87, and 91.

93 J. D. Hamilton, *The uniformly accelerated reference frame*, American Journal of Physics **46**, pp. 83–89, 1978. Cited on page 87.

94 The best and cheapest mathematical formula collection remains the one by K. Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*, BI Hochschultaschenbcher, 1960. Cited on page 87.

95 C. G. Adler & R. W. Brehme, *Relativistic solutions to a falling body in a uniform gravitation field*, American Journal of Physics **59**, pp. 209–213, 1991. Cited on page 88.

96 See for example the excellent lecture notes by D. J. Raymond, *A radically modern approach to freshman physics*, on the www.physics.nmt.edu/~raymond/teaching.html website. Cited on pages 88 and 313.

97 Edward A. Desloge, *The gravitational red-shift in a uniform field*, American Journal of Physics **58**, pp. 856–858, 1990. Cited on page 91.

98 L. Mishra, *The relativistic acceleration addition theorem*, Classical and Quantum Gravity **11**, pp. L97–L102, 1994. Cited on page 92.

99 Edwin F. Taylor & A. P. French, *Limitation on proper length in special relativity*, American Journal of Physics **51**, pp. 889–893, 1983. Cited on page 93.

100 Clear statements against a varying speed of light are made by Michael Duff in several of his publications, such as M. J. Duff, *Comment on time-variation of fundamental constants*, arxiv.org/abs/hep-th/0208093. The opposite point of view, though incorrect, has been proposed by Moffat and by Magueijo. Cited on page 95.

101 The quote is form a letter of Gibbs to the American Academy of Arts and Sciences, in which he thanks the Academy for their prize. The letter was read in a session of the Academy and thus became part of the proceedings: J. W. Gibbs, *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, **16**, p. 420, 1881. Cited on page 99.

102 It seems that the first published statement of the principle was in the year 2000 edition of this text, in the chapter on gravitation and relativity. The present author discovered the maximum force principle in 1998, when searching for a way to derive the results of the last part of this adventure that would be so simple that it would convince even a secondary-school student. The reference is Christoph Schiller, *Motion Mountain – The Adventure of Physics*, found at www.motionmountain.net. The idea of a maximum force was also proposed by Gary Gibbons in 2002 (see reference below). Nowadays Gary Gibbons is more cautious than me about whether the maximum force can be seen as an actual physical principle (despite the title of his paper). The approach of a maximum force was discussed in various usenet discussion groups in the early twenty-first century. These discussion showed that the idea of a maximum force (and a maximum power) were known to some people, but that before Gibbons and me only few had put it in writing. Also this physics discovery was thus made much too late. In short, only the idea to raise maximum force or power to a *principle* seems to be original; it was published first in the reference following this one and then in C. Schiller, *General relativity and cosmology derived from principle of maximum power or force*, International Journal of Theoretical Physics **44**, pp. 1629–1647, 2005, preprint at arxiv.org/abs/physics/0607090. Cited on page 99.

Vol. VI, page ??

103 G. W. Gibbons, *The maximum tension principle in general relativity*, Foundations of Physics **32**, pp. 1891–1901, 2002, or arxiv.org/abs/hep-th/0210109. Gary Gibbons explains that the maximum force follows from general relativity; he does not make a statement about the converse. See also R. Beig, G. W. Gibbons & R. M. Schoen, *Gravitating opposites attract*, Classical and Quantum Gravity **26**, p. 225013, 2009, preprint at arxiv.org/abs/09071103, and L. Kostro & B. Lange, *Is c^4/G the greatest possible force in nature?*, Physics Essays **12**, pp. 182–189, 1999. See also C. Massa, *Does the gravitational constant*

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

increase?, Astrophysics and Space Science **232**, pp. 143–148, 1995. Cited on pages 99, 109, and 138.

104 See the fundamental paper by A. DiSessa, *Momentum flow as an alternative perspective in elementary mechanics*, **48**, p. 365, 1980, and A. DiSessa, *Erratum: ''Momentum flow as an alternative perspective in elementary mechanics'' [Am. J. Phys. 48, 365 (1980)]*, **48**, p. 784, 1980. Also the excellent physics textbook by Friedrich Herrmann, *The Karlsruhe Physics Course*, makes this point extensively; it is free to download in English, Spanish, Russian, Italian and Chinese at www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/index_en.html. Cited on page 100.

105 C. Schiller, *Maximum force and minimum distance: physics in limit statements*, preprint at arxiv.org/abs/physics/0309118; it is also part of the sixth volume of this text, which is freely downloadable at www.motionmountain.net. Cited on pages 101, 104, 114, and 123.

106 H. C. Ohanian & Remo Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, W.W. Norton & Co., 1994. Another textbook that talks about the power limit is Ian R. Kenyon, *General Relativity*, Oxford University Press, 1990. The maximum power is also discussed in L. Kostro, *The quantity c^5/G interpreted as the greatest possible power in nature*, Physics Essays **13**, pp. 143–154, 2000. Cited on pages 103, 113, 114, 117, 120, 304, 314, and 323.

107 An overview of the literature on analog model of general relativity can be found on Matt Visser's website www.physics.wustl.edu/~visser/Analog/bibliography.html. Cited on page 103.

108 See for example Wolfgang Rindler, *Relativity – Special, General and Cosmological*, Oxford University Press, 2001, p. 70 ff, or Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, 1992, p. 36 ff. No citations.

109 See for example A. Ashtekar, S. Fairhust & B. Krishnan, *Isolated horizons: Hamiltonian evolution and the first law*, arxiv.org/abs/gr-qc/0005083. Cited on page 105.

110 T. Jacobson, *Thermodynamics of spacetime: the Einstein equation of state*, Physical Review Letters **75**, pp. 1260–1263, 1995 or arxiv.org/abs/gr-qc/9504004. Cited on page 106.

111 See for example Ekkehart Kröner, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Springer, 1958, volume 5 of the series 'Ergebnisse der angewandten Mathematik'. Kröner shows the similarity between the equations, methods and results of solid-state continuum physics and those of general relativity, including the Ricci formalism. Cited on pages 109 and 194.

112 See the excellent book Edwin F. Taylor & John A. Wheeler, *Spacetime Physics – Introduction to Special Relativity*, second edition, Freeman, 1992. Cited on pages 110 and 313.

113 This counter-example was suggested by Steve Carlip. Cited on page 112.

114 E. R. Caianiello, Lettere al Nuovo Cimento **41**, p. 370, 1984. Cited on page 114.

115 A notable exception is the physics teching group in Karlsruhe, who has always taught force in the correct way. See F. Herrmann, *Mengenartige Größen im Physikunterricht*, Physikalische Blätter **54**, pp. 830–832, September 1998. See also the lecture notes on general introductory physics on the website www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/skripten. Cited on page 119.

116 R. Penrose, *Naked singularities*, Annals of the New York Academy of Sciences **224**, pp. 125–134, 1973. No citations.

117 G. Huisken & T. Ilmanen, *The Riemannian Penrose inequality*, International Mathematics Research Notices **59**, pp. 1045–1058, 1997. S. A. Hayward, *Inequalities relating area, energy, surface gravity and charge of black holes*, Physical Review Letters **81**, pp. 4557–4559, 1998. No citations.

118 C. Will, *Was Einstein Right? – Putting General Relativity to the Test*, Oxford University Press, 1993. See also his paper arxiv.org/abs/gr-qc/9811036. Cited on page 121.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

119 The measurement results by the WMAP satellite are summarized on the website map.gsfc.nasa.gov/m_mm.html; the papers are available at lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/map_bibliography.cfm. No citations.

120 The simplest historical source is Albert Einstein, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften II pp. 844–846, 1915. It is the first explanation of the general theory of relativity, in only three pages. The theory is then explained in detail in the famous article Albert Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativittstheorie*, Annalen der Physik **49**, pp. 769–822, 1916. The historic references can be found in German and English in John Stachel, ed., *The Collected Papers of Albert Einstein*, Volumes 1–9, Princeton University Press, 1987–2004.

Below is a selection of English-language textbooks for deeper study, in ascending order of depth and difficulty:

— An entertaining book without any formulae, but nevertheless accurate and detailed, is the paperback by Igor Novikov, *Black Holes and the Universe*, Cambridge University Press, 1990.
— Almost no formulae, but loads of insight, are found in the enthusiastic text by John A. Wheeler, *A Journey into Gravity and Spacetime*, W.H. Freeman, 1990.
— An excellent presentation is Edwin F. Taylor & John A. Wheeler, *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*, Addison Wesley Longman, 2000.
— Beauty, simplicity and shortness are the characteristics of Malcolm Ludvigsen, *General Relativity, a Geometric Approach*, Cambridge University Press, 1999.
— Good explanation is the strength of Bernard Schutz, *Gravity From the Ground Up*, Cambridge University Press, 2003.
— A good overview of experiments and theory is given in James Foster & J. D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity*, Springer Verlag, 2nd edition, 1998.
— A pretty text is Sam Lilley, *Discovering Relativity for Yourself*, Cambridge University Press, 1981.
— A modern text is by Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Clarendon Press, 1992. It includes an extended description of black holes and gravitational radiation, and regularly refers to present research.
— A beautiful, informative and highly recommended text is H. C. Ohanian & Remo Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, W.W. Norton & Co., 1994.
— A well written and modern book, with emphasis on the theory, by one of the great masters of the field is Wolfgang Rindler, *Relativity – Special, General and Cosmological*, Oxford University Press, 2001.
— A classic is Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, 1972.
— The passion of general relativity can be experienced also in John Klauder, ed., *Magic without Magic: John Archibald Wheeler – A Collection of Essays in Honour of His Sixtieth Birthday*, W.H. Freeman & Co., 1972.
— An extensive text is Kip S. Thorne, *Black Holes and Time Warps – Einstein's Outrageous Legacy*, W.W. Norton, 1994.
— The most mathematical – and toughest – text is Robert M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.
— Much information about general relativity is available on the internet. As a good starting point for US-American material, see the math.ucr.edu/home/baez/physics/ website.

There is still a need for a large and modern textbook on general relativity, with colour material, that combines experimental and theoretical aspects. For texts in other languages, see the next reference. Cited on pages 126, 151, 153, 187, and 188.

121 A beautiful German teaching text is the classic G. Falk & W. Ruppel, *Mechanik, Relativität, Gravitation – ein Lehrbuch*, Springer Verlag, third edition, 1983.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

A practical and elegant booklet is Ulrich E. Schröder, *Gravitation – Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2001.

A modern reference is Torsten Fliessbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, Akademischer Spektrum Verlag, 1998.

Excellent is Hubert Goenner, *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Akademischer Spektrum Verlag, 1996.

In Italian, there is the beautiful, informative, but expensive H. C. Ohanian & Remo Ruffini, *Gravitazione e spazio-tempo*, Zanichelli, 1997. It is highly recommended. A modern update of that book would be without equals. Cited on pages 126, 151, 153, 167, 168, 188, and 322.

122 P. Mohazzabi & J. H. Shea, *High altitude free fall*, American Journal of Physics **64**, pp. 1242–1246, 1996. As a note, due to a technical failure Kittinger had his hand in (near) vacuum during his ascent, without incurring any permanent damage. On the consequences of human exposure to vacuum, see the www.sff.net/people/geoffrey.landis/vacuum.html website. Cited on page 127.

123 This story is told by W. G. Unruh, *Time, gravity, and quantum mechanics*, preprint available at arxiv.org/abs/gr-qc/9312027. Cited on page 127.

124 H. Bondi, *Gravitation*, European Journal of Physics **14**, pp. 1–6, 1993. Cited on page 128.

125 J. W. Brault, Princeton University Ph.D. thesis, 1962. See also J. L. Snider, Physical Review Letters **28**, pp. 853–856, 1972, and for the star Sirius see J.L. Greenstein & al., Astrophysical Journal **169**, p. 563, 1971. Cited on page 276.

126 See the detailed text by Jeffrey Crelinsten, *Einstein's Jury – The Race to Test Relativity*, Princeton University Press, 2006, which covers all researchers involved in the years from 1905 to 1930. Cited on page 130.

127 The famous paper is R. V. Pound & G. A. Rebka, *Apparent weight of photons*, Physical Review Letters **4**, pp. 337–341, 1960. A higher-precision version was published by R. V. Pound & J. L. Snider, Physical Review Letters **13**, p. 539, 1964, and R. V. Pound & J. L. Snider, Physical Review B **140**, p. 788, 1965. Cited on pages 130 and 276.

128 R.F.C. Vessot & al., *Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser*, Physical Review Letters **45**, pp. 2081–2084, 1980. The experiment was performed in 1976; there are more than a dozen co-authors involved in this work, which involved shooting a maser into space with a scout missile to a height of *c.* 10 000 km. Cited on page 130.

129 L. Briatore & S. Leschiutta, *Evidence for Earth gravitational shift by direct atomic-time-scale comparison*, Il Nuovo Cimento **37B**, pp. 219–231, 1977. Cited on page 130.

130 More information about tides can be found in E. P. Clancy, *The Tides*, Doubleday, New York, 1969. Cited on page 132.

131 The expeditions had gone to two small islands, namely to Sobral, north of Brazil, and to Principe, in the gulf of Guinea. The results of the expedition appeared in *The Times* before they appeared in a scientific journal. Today this would be called unprofessional. The results were published as F. W. Dyson, A. S. Eddington & C. Davidson, Philosophical Transactions of the Royal Society (London) **220A**, p. 291, 1920, and Memoirs of the Royal Astronomical Society **62**, p. 291, 1920. Cited on page 133.

132 D. Kennefick, *Testing relativity from the 1919 eclipse – a question of bias*, Physics Today pp. 37–42, March 2009. This excellent article discusses the measurement errors in great detail. The urban legend that the star shiftswere so small on the negatives that they implied large measurement errors is wrong – it might be due to a lack of respect on the part of some physicists for the abilities of astronomers. The 1979 reanalysis of the measurement confirm that such small shifts, smaller than the star image diameter, are reliably measurable. In fact, the 1979 reanalysis of the data produced a smaller error bar than the 1919 analysis. Cited on page 133.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

133 A good source for images of space-time is the text by G. F. R. Ellis & R. Williams, *Flat and Curved Space-times*, Clarendon Press, Oxford, 1988. Cited on page 134.

134 J. Droste, *Het veld van een enkel centrum in Einstein's theorie der zwaartekracht, en de beweging van een stoffelijk punt*, Verslag gew. Vergad. Wiss. Amsterdam **25**, pp. 163–180, 1916. Cited on page 135.

135 The name *black hole* was introduced in 1967 at a pulsar conference, as described in his autobiography by John A. Wheeler, *Geons, Black Holes, and Quantum Foam: A Life in Physics*, W.W. Norton, 1998, pp. 296–297: 'In my talk, I argued that we should consider the possibility that at the center of a pulsar is a gravitationally completely collapsed object. I remarked that one couldn't keep saying ''gravitationally completely collapsed object'' over and over. One needed a shorter descriptive phrase. ''How about black hole?'' asked someone in the audience. I had been searching for just the right term for months, mulling it over in bed, in the bathtub, in my car, whenever I had quiet moments. Suddenly, this name seemed exactly right. When I gave a more formal ... lecture ... a few weeks later on, on December 29, 1967, I used the term, and then included it into the written version of the lecture published in the spring of 1968 ... I decided to be casual about the term ''black hole'', dropping it into the lecture and the written version as if it were an old familiar friend. Would it catch on? Indeed it did. By now every schoolchild has heard the term.'

The widespread use of the term began with the article by R. Ruffini & J. A. Wheeler, *Introducing the black hole*, Physics Today **24**, pp. 30–41, January 1971.

In his autobiography, Wheeler also writes that the expression 'black hole has no hair' was criticized as 'obscene' by Feynman. This is a bizarre comment, given that Feynman used to write his papers in topless bars. Cited on pages 136, 247, and 255.

136 L. B. Kreuzer, *Experimental measurement of the equivalence of active and passive gravitational mass*, Physical Review **169**, pp. 1007–1012, 1968. With a clever experiment, he showed that the gravitational masses of fluorine and of bromine are equal. Cited on page 136.

137 A good and accessible book on the topic is David Blair & Geoff McNamara, *Ripples on a cosmic sea*, Allen & Unwin, 1997. Cited on page 136.

138 That bodies fall along geodesics, independently of their mass, the so-called weak equivalence principle, has been checked by many experiments, down to the 10^{-13} level. The most precise experiments use so-called torsion balances. See, for example, the website of the Eőt-Wash group at www.npl.washington.edu/eotwash/experiments/experiments.html. Cited on page 140.

139 So far, the experiments confirm that electrostatic and (strong) nuclear energy fall like matter to within one part in 10^8, and weak (nuclear) energy to within a few per cent. This is summarized in Ref. 143. Cited on page 141.

140 J. Soldner, *Berliner Astronomisches Jahrbuch auf das Jahr 1804*, 1801, p. 161. Cited on page 141.

141 See for example K. D. Olum, *Superluminal travel requires negative energies*, Physical Review Letters **81**, pp. 3567–3570, 1998, or M. Alcubierre, *The warp drive: hyper-fast travel within general relativity*, Classical and Quantum Gravity **11**, pp. L73–L77, 1994. See also Chris Van Den Broeck, *A warp drive with more reasonable total energy requirements*, Classical and Quantum Gravity **16**, pp. 3973–3979, 1999. Cited on page 144.

142 See the *Astronomical Almanac*, and its *Explanatory Supplement*, H.M. Printing Office, London and U.S. Government Printing Office, Washington, 1992. For the information about various time coordinates used in the world, such as barycentric coordinate time, the time at the barycentre of the solar system, see also the tycho.usno.navy.mil/systime.html web page. It also contains a good bibliography. Cited on page 145.

143 An overview is given in C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, chapter

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

14.3, Cambridge University Press, revised edition, 1993. (Despite being a standard reference, his view the role of tides and the role of gravitational energy within the principle of equivalence has been criticised by other researchers.) See also C. Will, *Was Einstein Right? – Putting General Relativity to the Test*, Oxford University Press, 1993. See also his paper arxiv.org/abs/gr-qc/9811036. Cited on pages 145, 151, and 319.

144 The calculation omits several smaller effects, such as rotation of the Earth and red-shift. For the main effect, see Edwin F. Taylor, *'The boundaries of nature: special and general relativity and quantum mechanics, a second course in physics' – Edwin F. Taylor's acceptance speech for the 1998 Oersted Medal presented by the American Association of Physics Teachers, 6 January 1998*, American Journal of Physics **66**, pp. 369–376, 1998. Cited on page 146.

145 A. G. Lindh, *Did Popper solve Hume's problem?*, Nature **366**, pp. 105–106, 11 November 1993, Cited on page 146.

146 P. Kaaret, S. Piraino, P. F. Bloser, E. C. Ford, J. E. Grindlay, A. Santangelo, A. P. Smale & W. Zhang, *Strong Field Gravity and X-Ray Observations of 4U1820-30*, Astrophysical Journal **520**, pp. L37–L40, 1999, or at arxiv.org/abs/astro-ph/9905236. The beautiful graphics at the research.physics.uiuc.edu/CTA/movies/spm website illustrate this star system. Cited on page 146.

147 R. J. Nemiroff, *Visual distortions near a black hole and a neutron star*, American Journal of Physics **61**, pp. 619–632, 1993. No citations.

148 The equality was first tested with precision by R. von Eötvös, Annalen der Physik & Chemie **59**, p. 354, 1896, and by R. von Eötvös, V. Pekár, E. Fekete, *Beiträge zum Gesetz der Proportionalität von Trägheit und Gravität*, Annalen der Physik 4, Leipzig **68**, pp. 11–66, 1922. Eötvös found agreement to 5 parts in 10^9. More experiments were performed by P. G. Roll, R. Krotkow & R. H. Dicke, *The equivalence of inertial and passive gravitational mass*, Annals of Physics (NY) **26**, pp. 442–517, 1964, one of the most interesting and entertaining research articles in experimental physics, and by V. B. Braginsky & V. I. Panov, Soviet Physics – JETP **34**, pp. 463–466, 1971. Modern results, with errors less than one part in 10^{12}, are by Y. Su & al., *New tests of the universality of free fall*, Physical Review **D50**, pp. 3614–3636, 1994. Several future experiments have been proposed to test the equality in space to less than one part in 10^{16}. Cited on pages 147 and 276.

149 Nigel Calder, *Einstein's Universe*, Viking, 1979. Weizmann and Einstein once crossed the Atlantic on the same ship. Cited on page 149.

150 L. Lerner, *A simple calculation of the deflection of light in a Schwarzschild gravitational field*, American Journal of Physics **65**, pp. 1194–1196, 1997. Cited on page 150.

151 A. Einstein, *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*, Annalen der Physik **35**, p. 898, 1911. Cited on page 151.

152 I. I. Shapiro, & al., *Fourth test of general relativity*, Physical Review Letters **13**, pp. 789–792, 1964. Cited on page 152.

153 I. I. Shapiro, & al., *Fourth test of general relativity: preliminary results*, Physical Review Letters **20**, pp. 1265–1269, 1968. Cited on page 152.

154 J. H. Taylor, *Pulsar timing and relativistic gravity*, Proceedings of the Royal Society, London A **341**, pp. 117–134, 1992. Cited on page 154.

155 B. Bertotti, I. Ciufolini & P. L. Bender, *New test of general relativity: measurement of De Sitter geodetic precession rate for lunar perigee*, Physical Review Letters **58**, pp. 1062–1065, 1987. Later it was confirmed by I.I. Shapiro & al., *Measurement of the De Sitter precession of the moon: a relativistic three body effect*, Physical Review Letters **61**, pp. 2643–2646, 1988. Cited on page 276.

156 The Thirring effect was predicted in H. Thirring, *Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie*, Physikalische Zeitschrift **19**, pp. 33–39,

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

1918, and in H. Thirring, *Berichtigung zu meiner Arbeit: ''ber die Wirkung rotierender Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie''*, Physikalische Zeitschrift **22**, p. 29, 1921. The Thirring–Lense effect was predicted in J. Lense & H. Thirring, *Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie*, Physikalische Zeitschrift **19**, pp. 156–163, 1918. Cited on page 157.

157 W. de Sitter, *On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences*, Monthly Notes of the Royal Astrononmical Society **77**, pp. 155–184, p. 418E, 1916. For a discussion of De Sitter precession and Thirring–Lense precession, see also B. R. Holstein, *Gyroscope precession in general relativity*, American Journal of Physics **69**, pp. 1248–1256, 2001. Cited on page 157.

158 The work is based on the LAGEOS and LAGEOS II satellites and is told in I. Ciufolini, *The 1995–99 measurements of the Thirring–Lense effect using laser-ranged satellites*, Classical and Quantum Gravity **17**, pp. 2369–2380, 2000. See also I. Ciufolini & E. C. Pavlis, *A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense–Thirring effect*, Nature **431**, pp. 958–960, 2004. See, however, the next reference. Cited on pages 158 and 276.

159 See the interesting, detailed and disturbing discussion by L. Iorio, *On some critical issues of the LAGEOS-based tests of the Lense–Thirring effect*, Journal of Modern Physics **2**, pp. 210–218, 2011, preprint available at arxiv.org/abs/1104.4464. Cited on pages 158 and 276.

160 On the Gravity Probe B satellite experiment, see the web page einstein.stanford.edu/highlights/status1.html and the papers cited there. No citations.

161 The detection of the Thirring–Lense effect in binary pulsars is presented in R. D. Blandford, *Lense–Thirring precession of radio pulsars*, Journal of Astrophysics and Astronomy **16**, pp. 191–206, 1995. Cited on page 158.

162 G. Holzmüller, Zeitschrift für Mathematik und Physik **15**, p. 69, 1870, F. Tisserand, Comptes Rendus **75**, p. 760, 1872, and Comptes Rendus **110**, p. 313, 1890. No citations.

163 B. Mashhoon, *Gravitoelectromagnetism: a brief review*, arxiv.org/abs/gr-qc/0311030, and B. Mashhoon, *Gravitoelectromagnetism*, arxiv.org/abs/gr-qc/0011014. See also its extensive reference list on gravitomagnetism. Cited on page 159.

164 A. Tartaglia & M. L. Ruggiero, *Gravito-electromagnetism versus electromagnetism*, European Journal of Physics **25**, pp. 203–210, 2004. Cited on page 159.

165 D. Bedford & P. Krumm, *On relativistic gravitation*, American Journal of Physics **53**, pp. 889–890, 1985, and P. Krumm & D. Bedford, *The gravitational Poynting vector and energy transfer*, American Journal of Physics **55**, pp. 362–363, 1987. Cited on pages 159 and 166.

166 M. Kramer & al., *Tests of general relativity from timing the double pulsar*, preprint at arxiv.org/abs/astro-ph/0609417. Cited on pages 161 and 276.

167 This is told in John A. Wheeler, *A Journey into Gravity and Spacetime*, W.H. Freeman, 1990. Cited on page 162.

168 See, for example, K. T. McDonald, *Answer to question #49. Why c for gravitational waves?*, American Journal of Physics **65**, pp. 591–592, 1997, and section III of V. B. Braginsky, C. M. Caves & K. S. Thorne, *Laboratory experiments to test relativistic gravity*, Physical Review D **15**, pp. 2047–2068, 1992. Cited on page 163.

169 A proposal to measure the speed of gravity is by S. M. Kopeikin, *Testing the relativistic effect of the propagation of gravity by Very Long Baseline Interferometry*, Astrophysical Journal **556**, pp. L1–L5, 2001, and the experimental data is E. B. Formalont & S. M. Kopeikin, *The measurement of the light deflection from Jupiter: experimental results*, Astrophysical Journal **598**, pp. 704–711, 2003. See also S. M. Kopeikin, *The post-Newtonian treatment of the VLBI experiment on September 8, 2002*, Physics Letters A **312**,

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

pp. 147–157, 2003, or arxiv.org/abs/gr-qc/0212121. Several arguments against the claim were published, such as C. M. Will, *Propagation speed of gravity and the relativistic time delay*, arxiv.org/abs/astro-ph/0301145, and S. Samuel, *On the speed of gravity and the v/c corrections to the Shapiro time delay*, arxiv.org/abs/astro-ph/0304006. The discussion went on, as shown in S. M. Kopeikin & E. B. Formalont, *Aberration and the fundamental speed of gravity in the Jovian deflection experiment*, Foundations of Physics **36**, pp. 1244–1285, 2006, preprint at arxiv.org/abs/astro-ph/0311063. Both sides claim to be right: the experiment claims to deduce the speed of gravity from the lack of a tangential component of the light deflection by the gravity of Jupiter, and the critical side claims that the speed of gravity does not enter in this measurement. If we compare the situation with analogous systems in transparent fluids or solids, which also show no tangential deflection component, we conclude that neither the measurement nor the proposal allow us to deduce information on the speed of gravity. A similar conclusion, but based on other arguments, is found on physics.wustl.edu/cmw/SpeedofGravity.html. No citations.

170 For an introduction to gravitational waves, see B. F. Schutz, *Gravitational waves on the back of an envelope*, American Journal of Physics **52**, pp. 412–419, 1984. Cited on page 164.

171 The quadrupole formula is explained clearly in the text by Goenner. See Ref. 121. Cited on page 166.

172 The beautiful summary by Daniel Kleppner, *The gem of general relativity*, Physics Today **46**, pp. 9–11, April 1993, appeared half a year before the authors of the cited work, Joseph Taylor and Russel Hulse, received the Nobel Prize for the discovery of millisecond pulsars. A more detailed review article is J. H. Taylor, *Pulsar timing and relativistic gravity*, Philosophical Transactions of the Royal Society, London A **341**, pp. 117–134, 1992. The original paper is J. H. Taylor & J. M. Weisberg, *Further experimental tests of relativistic gravity using the binary pulsar PSR 1913+16*, Astrophysical Journal **345**, pp. 434–450, 1989. See also J. M. Weisberg, J. H. Taylor & L. A. Fowler, *Pulsar PSR 1913+16 sendet Gravitationswellen*, Spektrum der Wissenschaft, pp. 53–61, December 1981. Cited on page 168.

173 D. R. Lorimer, *Binary and millisecond pulsars*, in www.livingreviews.org/lrr-2005-7, and J. M. Weisberg & J. H. Taylor, *The relativistic binary pulsar B1913+16: thirty years of observations and analysis*, pp. 25–31, in F. A. Rasio & I. H. Stairs, editors, *Binary Radio Pulsars*, Proceedings of a meeting held at the Aspen Center for Physics, USA, 12 Janaury - 16 January 2004, volume 328 of ASP Conference Series, Astronomical Society of the Pacific, 2005. Cited on page 168.

174 W. B. Bonnor & M. S. Piper, *The gravitational wave rocket*, Classical and Quantum Gravity **14**, pp. 2895–2904, 1997, or arxiv.org/abs/gr-qc/9702005. Cited on page 168.

175 Wolfgang Rindler, *Essential Relativity*, Springer, revised second edition, 1977. Cited on page 172.

176 This is told (without the riddle solution) on p. 67, in Wolfgang Pauli, *Relativitätstheorie*, Springer Verlag, Berlin, 2000, the edited reprint of a famous text originally published in 1921. The reference is H. Vermeil, *Notiz über das mittlere Krümmungsmaß einer n-fach ausgedehnten Riemannschen Mannigfalktigkeit*, Göttinger Nachrichten, mathematische–physikalische Klasse p. 334, 1917. Cited on page 172.

177 M. Santander, L. M. Nieto & N. A. Cordero, *A curvature based derivation of the Schwarzschild metric*, American Journal of Physics **65**, pp. 1200–1209, 1997. Cited on pages 177 and 179.

178 Michael H. Soffel, *Relativity in Astronomy, Celestial Mechanics and Geodesy*, Springer Verlag, 1989. Cited on page 177.

179 Richard P. Feynman, Fernando B. Morinigo, William G. Wagner & Brian Hatfield, *Feynman Lectures on Gravitation*, Westview Press, 1995. Cited on page 178.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

180 J. C. Baez & E. F. Bunn, *The meaning of Einstein's equation*, American Journal of Physics **73**, pp. 644–652, 2005. No citations.

181 Y. Wang & M. Tegmark, *New dark energy constraints from supernovae, microwave background and galaxy clustering*, Physical Review Letters **92**, p. 241302, 2004, or arxiv.org/astro-ph/0403292. Cited on page 184.

182 Arguments for the emptiness of general covariance are given by John D. Norton, *General covariance and the foundations of general relativity*, Reports on Progress in Physics **56**, pp. 791–858, 1993. The opposite point, including the discussion of 'absolute elements', is made in the book by J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics*, chapter 4, Academic Press, 1967. Cited on page 184.

183 For a good introduction to mathematical physics, see the famous three-women text in two volumes by Yvonne Choquet-Bruhat, Cecile DeWitt-Morette & Margaret Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds, and Physics*, North-Holland, 1996 and 2001. The first edition of this classic appeared in 1977. Cited on page 186.

184 C. G. Torre & I. M. Anderson, *Symmetries of the Einstein equations*, Physical Review Letters **70**, pp. 3525–3529, 1993, or arxiv.org/abs/gr-qc/9302033. Cited on page 187.

185 H. Nicolai, *Gravitational billiards, dualities and hidden symmetries*, arxiv.org//abs/gr-qc/0506031. Cited on page 188.

186 The original paper is R. Arnowitt, S. Deser & C. Misner, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity*, Physical Review **122**, pp. 997–1006, 1961. Cited on page 188.

187 See for example H. L. Bray, *Black holes, geometric flows, and the Penrose inequality in general relativity*, Notices of the AMS **49**, pp. 1372–1381, 2002. Cited on page 188.

188 See for example R.A. Knop & al., *New constraints on Ω_M, Ω_Λ, and w from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with HST*, Astrophysical Journal **598**, pp. 102–137, 2003. No citations.

189 See for example the paper by K. Dalton, *Gravity, geometry, and equivalence*, preprint to be found at arxiv.org/abs/gr-qc/9601004, and L. Landau & E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon, 4th edition, 1975, p. 241. Cited on page 189.

190 A recent overview on the experimental tests of the universality of free fall is that by R. J. Hughes, *The equivalence principle*, Contemporary Physics **4**, pp. 177–191, 1993. Cited on page 191.

191 The equivalence of the various definitions of the Riemann tensor is explained in most texts on general relativity; see Ref. 106. Cited on page 192.

192 K. Tangen, *Can the Pioneer anomaly have a gravitational origin?*, arxiv.org/abs/gr-qc/0602089. Cited on page 193.

193 H. Dittus & C. Lmmerzahl, *Die Pioneer-Anomalie*, Physik Journal **5**, pp. 25–31, January 2006. Cited on page 193.

194 Black hole analogues appear in acoustics, fluids and several other fields. This is an ongoing research topic. See, for example, M. Novello, S. Perez Bergliaffa, J. Salim, V. De Lorenci & R. Klippert, *Analog black holes in flowing dielectrics*, preprint at arxiv.org/abs/gr-qc/0201061, T. G. Philbin, C. Kuklewicz, S. Robertson, S. Hill, F. Konig & U. Leonhardt, *Fiber-optical analog of the event horizon*, Science **319**, pp. 1367–1379, 2008, O. Lahav, A. Itah, A. Blumkin, C. Gordon & J. Steinhauer, *A sonic black hole in a density-inverted Bose–Einstein condensate*, arxiv.org/abs/0906.1337. Cited on page 194.

195 This famous quote is the first sentence of the final chapter, the 'Beschluß', of Immanuel Kant, *Kritik der praktischen Vernunft*, 1797. Cited on page 196.

196 About the myths around the stars and the constellations, see the text by G. Fasching, *Sternbilder und ihre Mythen*, Springer Verlag, 1993. On the internet there are also the beau-

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

tiful www.astro.wisc.edu/~dolan/constellations/ and www.astro.uiuc.edu/~kaler/sow/sow.html websites. Cited on page 196.

197 A. Mellinger, *A color all-sky panorama of the Milky Way*, preprint at arxiv.org/abs/0908.4360. Cited on page 197.

198 Aetius, Opinions, III, I, 6. See Jean-Paul Dumont, *Les écoles présocratiques*, Folio Essais, Gallimard, 1991, p. 445. Cited on page 196.

199 P. Jetzer, *Gravitational microlensing*, Naturwissenschaften **86**, pp. 201–211, 1999. Measurements using orbital speeds around the Galaxy gives agree with this value. Cited on pages 200 and 206.

200 Dirk Lorenzen, *Geheimnivolles Universum – Europas Astronomen entschleiern das Weltall*, Kosmos, 2002. See also the beautiful website of the European Southern Observatory at www.eso.org. Cited on page 201.

201 A beautiful introduction to modern astronomy was Paolo Maffei, *I mostri del cielo*, Mondadori Editore, 1976. Cited on page 201.

202 See for example A. N. Cox, ed., *Allen's Astrophysical Quantities*, AIP Press and Springer Verlag, 2000. An overview of optical observations is given by the Sloan Digital Sky Survey at skyserver.sdss.org. More details about the universe can be found in the beautiful text by W. J. Kaufmann & R. A. Fredman, *Universe*, fifth edition, W.H. Freeman & Co., 1999. The most recent discoveries are best followed on the sci.esa.int and hubble.nasa.gov websites. Cited on page 205.

203 D. R. Lorimer, A. J. Faulkner, A. G. Lyne, R. N. Manchester, M. Kramer, M. A. McLaughlin, G. Hobbs, A. Possenti, I. H. Stairs, F. Camilo, M. Burgay, N. D'Amico, A. Corongiu & F. Crawford, *The Parkes multibeam pulsar survey: VI. Discovery and timing of 142 pulsars and a Galactic population analysis*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society preprint at arxiv.org/abs/astro-ph/0607640. Cited on page 206.

204 D. Figer, *An upper limit to the masses of stars*, Nature **434**, pp. 192–194, 2005. Cited on page 206.

205 G. Basri, *The discovery of brown dwarfs*, Scientific American **282**, pp. 77–83, April 2001. Cited on page 206.

206 See the well-written paper by P. M. Woods & C. Thompson, *Soft gamma repeaters and anomalous X-ray pulsars: magnetar candidates*, preprint at arxiv.org/abs/astro-ph/0406133. Cited on page 207.

207 B. M. Gaensler, N. M. McClure-Griffiths, M. S. Oey, M. Haverkorn, J. M. Dickey & A. J. Green, *A stellar wind bubble coincident with the anomalous X-ray pulsar 1E 1048.1-5937: are magnetars formed from massive progenitors?*, The Astrophysical Journal (Letters) **620**, pp. L95–L98, 2005, or arxiv.org/abs/astro-ph/0501563. Cited on page 207.

208 Opposition to the cosmological principle is rare, as experimental data generally supports it. Local deviations are discussed by various cosmologists; the issue is still open. See, for example, D. Wiltshire, *Gravitational energy and cosmic acceleration*, preprint at arxiv.org/abs/0712.3982, and D. Wiltshire, *Dark energy without dark energy*, preprint at arxiv.org/abs/0712.3984. Cited on page 210.

209 C. Wirtz, Scientia **38**, p. 303, 1925, and K. Lundmark, *The motions and the distances of the spiral nebulae*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **85**, pp. 865–894, 1925. See also G. Stromberg, *Analysis of radial velocities of globular clusters and non-galactic nebulae*, Astrophysical Journal **61**, pp. 353–362, 1925. Cited on page 210.

210 G. Gamow, *The origin of the elements and the separation of galaxies*, Physical Review **74**, p. 505, 1948. Cited on page 211.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

211 A. G. Doroshkevich, & I. D. Novikov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **154**, p. 809, 1964. It appeared translated into English a few months later. The story of the prediction was told by Penzias in his Nobel lecture. Cited on page 211.

212 Arno A. Penzias & Robert W. Wilson, *A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mcs*, Astrophysical Journal **142**, pp. 419–421, 1965. Cited on page 212.

213 See for example, D. Prialnik, *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*, Cambridge University Press, 2000. Cited on page 213.

214 Star masses are explored in D. Figier, *An upper limit to the masses of stars*, Nature **434**, pp. 192–194, 2005. Cited on page 214.

215 Macrobius, *Somnium Scipionis*, XIV, 19. See Jean-Paul Dumont, *Les écoles présocratiques*, Folio Essais, Gallimard, 1991, p. 61. Cited on page 214.

216 On the remote history of the universe, see the excellent texts by G. Börner, *The Early Universe – Facts & Fiction*, Springer Verlag, 3rd edition, 1993, or Barry Parker, *Creation – The Story of the Origin and the Evolution of the Universe*, Plenum Press, 1988. For an excellent popular text, see M. Longair, *Our Evolving Universe*, Cambridge University Press, 1996. Cited on page 214.

217 The first oxygen seems to have appeared in the atmosphere, produced by microorganisms, 2.32 thousand million years ago. See A. Becker & al., *Dating the rise of atmospheric oxygen*, Nature **427**, pp. 117–120, 2003. Cited on page 216.

218 Gabriele Walker, *Snowball Earth – The Story of the Great Global Catastrophe That Spawned Life as We Know It*, Crown Publishing, 2003. Cited on page 216.

219 K. Knie, *Spuren einer Sternexplosion*, Physik in unserer Zeit **36**, p. 8, 2005. The first step of this connection is found in K. Knie, G. Korschinek, T. Faestermann, E. A. Dorfi, G. Rugel & A. Wallner, ^{60}*Fe anomaly in a deep-sea manganese crust and implications for a nearby supernova source*, Physics Review Letters **93**, p. 171103, 2004, the second step in N. D. Marsh & H. Svensmark, *Low cloud properties influenced by cosmic rays*, Physics Review Letters **85**, pp. 5004–5007, 2000, and the third step in P. B. de Menocal, *Plio-Pleistocene African climate*, Science **270**, pp. 53–59, 1995. Cited on page 217.

220 A. Friedman, *ber die Krmmung des Raumes*, Zeitschrift fr Physik **10**, pp. 377–386, 1922, and A. Friedmann, *ber die Mglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krmmung des Raumes*, Zeitschrift fr Physik **21**, pp. 326–332, 1924. (In the Latin transliteration, the author aquired a second 'n' in his second paper.) Cited on page 218.

221 H. Knutsen, *Darkness at night*, European Journal of Physics **18**, pp. 295–302, 1997. Cited on pages 223 and 226.

222 See for example P.D. Pešić, *Brightness at night*, American Journal of Physics **66**, pp. 1013–1015, 1998. Cited on pages 225 and 226.

223 Paul Wesson, *Olbers' paradox and the spectral intensity of extra-galactic background light*, Astrophysical Journal **367**, p. 399, 1991. Cited on page 226.

224 Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley, 1972. An excellent book written with a strong personal touch and stressing most of all the relation with experimental data. It does not develop a strong feeling for space-time curvature, and does not address the basic problems of space and time in general relativity. Excellent for learning how to actually calculate things, but less for the aims of our mountain ascent. Cited on pages 226 and 267.

225 Supernova searches are being performed by many research groups at the largest optical and X-ray telescopes. A famous example is the Supernova Cosmology project described at supernova.lbl.gov. Cited on page 227.

226 The experiments are discussed in detail in the excellent review by D. Giulini & N. Straumann, *Das Rtsel der kosmischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte*

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

Expansion des Universums, Physikalische Bltter **556**, pp. 41–48, 2000. See also N. Straumann, *The mystery of the cosmic vacuum energy density and the accelerated expansion of the universe*, European Journal of Physics **20**, pp. 419–427, 1999. Cited on pages 228 and 278.

227 A. Harvey & E. Schucking, *Einstein's mistake and the cosmological contant*, American Journal of Physics **68**, pp. 723–727, 2000. Cited on page 228.

228 The author of the bible explains *rain* in this way, as can be deduced from its very first page, Genesis 1: 6-7. Cited on page 229.

229 Up to his death, Fred Hoyle defended his belief that the universe is not described by the big bang, but by a steady flow; see G. Burbidge, F. Hoyle & J. V. Narlikar, *A different approach to cosmology*, Physics Today **52**, pp. 38–44, 1999. The team has also written a book with the same title, published in 2000. The newest book on the topic is J. V. Narlikar & G. Burbidge, *Facts and speculations in Cosmology*, Cambridge University Press, 2008, well worth reading because it is one of the rare books that are thought-provoking. Cited on pages 229 and 230.

230 Stephen W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973. Among other things, this reference text discusses the singularities of space-time, and their necessity in the history of the universe. Cited on pages 230 and 329.

231 Augustine, *Confessions*, 398, writes in Book XI: 'My answer to those who ask 'What was god doing before he made Heaven and Earth?' is not 'He was preparing Hell for people who pry into mysteries'. This frivolous retort has been made before now, so we are told, in order to evade the point of the question. But it is one thing to make fun of the questioner and another to find the answer. So I shall refrain from giving this reply. [...] Before God made heaven and earth, he did not make anything at all. [...] But if before Heaven and Earth there was no time, why is it demanded what you [god] did then? For there was no ''then'' when there was no time.' (Book XI, chapter 12 and 13). Cited on page 232.

232 Stephen Hawking, *A Brief History of Time – From the Big Bang to Black Holes*, 1988. Reading this bestseller is almost a must for any physicist, as it is a frequent topic at dinner parties. Cited on page 232.

233 Star details are explained in many texts on stellar structure and evolution. See for example Rudolf Kippenhahn & Alfred Weigert, *Stellar Structure and Evolution*, Springer, 1990. Cited on page 234.

234 J. Pelt, R. Kayser, S. Refsdal & T. Schramm, *The light curve and the time delay of QSO 0957+561*, Astronomy and Astrophysics **305**, p. 97, 1996. Cited on page 236.

235 F. Zwicky, *Nebulae as gravitational lenses*, Physical Review Letters **51**, p. 290, and F. Zwicky, *On the probability to detect nebulae which act as gravitational lenses*, p. 679, 1937. The negative view by Einstein is found in A. Einstein, *Lens-like action of a star by the deviatioin of light in the gravitational field*, Science **84**, pp. 506–507, 1936. A review on gravitational lensing can even be found online, in the paper by J. Wambsganss, *Gravitational lensing in astronomy*, Living Reviews in Relativity **1-12**, pp. 1–80, 1998, to be found on the www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-12wamb website.

There is also the book by P. Schneider, J. Ehlers & E. E. Falco, *Gravitational Lenses*, Springer Verlag, Berlin, 1992. Cited on page 237.

236 M. Lachize-Rey & J.-P. Luminet, *Cosmic topology*, Physics Reports **254**, pp. 135–214, 1995. See also B. F. Roukema, *The topology of the universe*, arxiv.org/abs/astro-ph/0010185 preprint. Cited on page 238.

237 Thanks to Steve Carlip for clarifying this point. No citations.

238 G. F. R. Ellis & T. Rothman, *Lost horizons*, American Journal of Physics **61**, pp. 883–893, 1993. No citations.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

239 A. Guth, *Die Geburt des Kosmos aus dem Nichts – Die Theorie des inflationären Universums*, Droemer Knaur, 1999. No citations.

240 Entropy values for the universe have been discussed by Ilya Prigogine, *Is Future Given?*, World Scientific, 2003. This was his last book. For a different approach, see G. A. Mena Marugn & S. Carneiro, *Holography and the large number hypothesis*, arxiv.org/abs/gr-qc/0111034. This paper also repeats the often heard statement that the universe has an entropy that is much smaller than the theoretical maximum. The maximum is often estimated to be in the range of $10^{100}\,k$ to $10^{120}\,k$. Other authors give $10^{84}\,k$. In 1974, Roger Penrose also made statements about the entropy of the universe. However, it is more correct to state that the entropy of the universe is not a useful quantity, because the universe is not a physical system. Cited on page 241.

241 C. L. Bennet, M. S. Turner & M. White, *The cosmic rosetta stone*, Physics Today **50**, pp. 32–38, November 1997. The cosmic background radiation differs from black hole radiation by less than 0.005 %. Cited on page 242.

242 The lack of expansion in the solar system is explained in detail in E. F. Bunn & D. W. Hogg, *The kinematic origin of the cosmological redshift*, American Journal of Physics 77, pp. 688–694, 2009. Cited on page 242.

243 A pretty article explaining how one can make experiments to find out how the human body senses rotation even when blindfolded and earphoned is described by M.-L. Mittelstaedt & H. Mittelstaedt, *The effect of centrifugal force on the perception of rotation about a vertical axis*, Naturwissenschaften **84**, pp. 366–369, 1997. Cited on page 243.

244 No dependence of *inertial mass* on the distribution of surrounding mass has ever been found in experiments. See, for example, R. H. Dicke, *Experimental tests of Mach's principle*, 7, pp. 359–360, 1961. Cited on page 243.

245 The present status is given in the conference proceedings by Julian Barbour & Herbert Pfister, eds., *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*, Birkhuser, 1995. Various formulations of Mach's principle – in fact, 21 different ones – are compared on page 530.

In a related development, in 1953, Dennis Sciama published a paper in which he argues that inertia of a particle is due to the gravitational attraction of all other matter in the universe. The paper is widely quoted, but makes no new statements on the issue. See D. W. Sciama, *On the origin of inertia*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **113**, pp. 34–42, 1953. Cited on pages 243 and 244.

246 Information on the rotation of the universe is given in A. Kogut, G. Hinshaw & A. J. Banday, *Limits to global rotation and shear from the COBE DMR four-year sky maps*, Physical Review D **55**, pp. 1901–1905, 1997. Earlier information is found in J. D. Barrow, R. Juszkiewicz & D. H. Sonoda, *Universal rotation: how large can it be?*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **213**, pp. 917–943, 1985. See also J. D. Barrow, R. Juszkiewicz & D. H. Sonoda, *Structure of the cosmic microwave background*, Nature **309**, pp. 397–402, 1983, or E. F. Bunn, P. G. Fereira & J. Silk, *How anisotropic is the universe?*, Physical Review Letters 77, pp. 2883–2886, 1996. Cited on page 244.

247 The issue has been discussed within linearized gravity by Richard Tolman, in his textbook *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*, Clarendon Press, 1934, on pp. 272–290. The exact problem has been solved by A. Peres, *Null electromagnetic fields in general relativity theory*, Physical Review **118**, pp. 1105–1110, 1960, and by W. B. Bonnor, *The gravitational field of light*, Commun. Math. Phys. **13**, pp. 163–174, 1969. See also N. V. Mitskievic & K. K. Kumaradtya, *The gravitational field of a spinning pencil of light*, Journal of Mathematical Physics **30**, pp. 1095–1099, 1989, and P. C. Aichelburg & R. U. Sexl, *On the gravitational field of a spinning particle*, General Relativity and Gravitation **2**, pp. 303–312, 1971. Cited on page 245.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

248 See the delightful popular account by Igor Novikov, *Black Holes and the Universe*, Cambridge University Press, 1990. The consequences of light decay were studied by M. Bronstein, *Die Ausdehnung des Weltalls*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion **3**, pp. 73–82, 1933. Cited on page 245.

249 C. L. Carilli, K. M. Menten, J. T. Stocke, E. Perlman, R. Vermeulen, F. Briggs, A. G. de Bruyn, J. Conway & C. P. Moore, *Astronomical constraints on the cosmic evolution of the fine structure constant and possible quantum dimensions*, Physical Review Letters **85**, pp. 5511–5514, 25 December 2000. Cited on page 245.

250 The observations of black holes at the centre of galaxies and elsewhere are summarised by R. Blandford & N. Gehrels, *Revisiting the black hole*, Physics Today **52**, pp. 40–46, June 1999. Cited on pages 247 and 259.

251 An excellent and entertaining book on black holes, without any formulae, but nevertheless accurate and detailed, is the paperback by Igor Novikov, *Black Holes and the Universe*, Cambridge University Press, 1990. See also Edwin F. Taylor & John A. Wheeler, *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*, Addison Wesley Longman 2000.

For a historical introduction, see the paper by R. Ruffini, *The physics of gravitationally collapsed objects*, pp. 59–118, in *Neutron Stars, Black Holes and Binary X-Ray Sources*, Proceedings of the Annual Meeting, San Francisco, Calif., February 28, 1974, Reidel Publishing, 1975. Cited on page 247.

252 J. Michell, *On the means of discovering the distance, magnitude, etc of the fixed stars*, Philosophical Transactions of the Royal Society London **74**, p. 35, 1784, reprinted in S. Detweiler, *Black Holes – Selected Reprints*, American Association of Physics Teachers, 1982. No citations.

253 The beautiful paper is R. Oppenheimer & H. Snyder, *On continued gravitational contraction*, Physical Review **56**, pp. 455–459, 1939. Cited on page 250.

254 R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Physical Review Letters **11**, pp. 237–238, 1963. No citations.

255 E. T. Newman, E. Couch, R. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash & R. Torrence, *Metric of a rotating, charged mass*, Journal of Mathematical Physics **6**, pp. 918–919, 1965. Cited on page 255.

256 For a summary, see P. O. Mazur, *Black hole uniqueness theorems*, pp. 130–157, in M. A. H. MacCallum, editor, *General Relativity and Gravitation*, Cambridge University Press, 1987, or the update at arxiv.org/abs/hep-th/0101012. See also D. C. Robinson, *Four decades of black hole uniqueness theorems*, available at www.mth.kcl.ac.uk/staff/dc_robinson/blackholes.pdf Cited on page 255.

257 H. P. Knzle & A. K. M. Masood-ul-Alam, *Spherically symmetric static SU(2) Einstein-Yang-Mills fields*, Journal of Mathematical Physics **31**, pp. 928–935, 1990. Cited on page 255.

258 An example of research that shows the tendency of gravitational radiation to produce spherical shapes when black holes collide is L. Rezzolla, R. P. Macedo & J. L. Jaramillo, *Understanding the ''anti kick'' in the merger of binary black holes*, Physical Review Letters **104**, p. 221101, 2010. Cited on pages 255 and 277.

259 R. Penrose & R. M. Floyd, *Extraction of rotational energy from a black hole*, Nature **229**, pp. 177–179, 1971. Cited on page 257.

260 The mass–energy relation for a rotating black hole is due to D. Christodoulou, *Reversible and irreversible transformations in black hole physics*, Physical Review Letters **25**, pp. 1596–1597, 1970. For a general, charged and rotating black hole it is due to D. Christodoulou & R. Ruffini, *Reversible transformations of a charged black hole*, Physical Review D **4**, pp. 3552–3555, 1971. Cited on page 257.

261 J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Physical Review **D7**, pp. 2333–2346, 1973. Cited on page 258.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

262 On the topic of black holes in the early universe, there are only speculative research papers, as found, for example, on arxiv.org. The issue is not settled yet. Cited on page 258.

263 For information about black holes formation via star collapse, see the Wikipedia article at en.wikipedia.org/wikie/Stellar_black_hole. Cited on page 259.

264 Frederick Lamb, APS meeting 1998 press conference: *Binary star 4U1820-30, 20 000 light years from Earth*, Physics News Update, April 27, 1998. Cited on page 260.

265 The first direct evidence for matter falling into a black hole was published in early 2001 by NASA astronomers led by Joseph Dolan. Cited on page 260.

266 For a readable summary of the Penrose–Hawking singularity theorems, see J. Natàrio, *Relativity and singularities – a short introduction for mathematicians*, preprint at arxiv.org/abs/math.DG/0603190. Details can be found in Ref. 230. Cited on page 260.

267 For an overview of cosmic censorship, see T. P. Singh, *Gravitational collapse, black holes, and naked singularities*, arxiv.org/abs/gr-qc/9805066, or R. M. Wald, *Gravitational collapse and cosmic censorship*, arxiv.org/abs/gr-qc/9710068. The original idea is due to R. Penrose, *Gravitational collapse: the role of general relativity*, Rivista del Nuovo Cimento **1**, pp. 252–276, 1969. Cited on page 261.

268 The paradox is discussed in M. A. Abramowicz, *Black holes and the centrifugal force paradox*, Scientific American **266**, pp. 74–81, March 1993, and in the comment by D. N. Page, *Relative alternatives*, Scientific American **266**, p. 5, August 1993. See also M. A. Abramowicz & E. Szuszkiewicz, *The wall of death*, American Journal of Physics **61**, pp. 982–991, 1993, and M. A. Abramowicz & J. P. Lasota, *On traveling round without feeling it and uncurving curves*, American Journal of Physics **54**, pp. 936–939, 1986. Cited on page 263.

269 J. Ehlers, *Introduction – Survey of Problems*, pp. 1–10, in J. Ehlers, editor, *Sistemi gravitazionali isolati in relatività generale*, Rendiconti della scuola internazionale di fisica ''Enrico Fermi'', LXVII° corso, Società Italiana di Fisica/North Holland, 1979. No citations.

270 G. J. Stoney, *On the physical units of nature*, Philosophical Magazine **11**, pp. 381–391, 1881. Cited on page 268.

271 The geometrodynamic clock is discussed in D. E. Brahm & R. P. Gruber, *Limitations of the geometrodynamic clock*, General Relativity and Gravitation **24**, pp. 297–303, 1992. The clock itself was introduced by R. F. Marzke, in his Ph.D. thesis *The theory of measurement in general relativity*, 1959, with John Wheeler as thesis adviser. Cited on page 268.

272 R. Geroch, *Einstein algebras*, Commun. Math. Phys. **26**, pp. 271–275, 1972. Cited on page 269.

273 A. Macdonald, *Einstein's hole argument*, American Journal of Physics **69**, pp. 223–225, 2001. Cited on page 270.

274 Roman U. Sexl, *Die Hohlwelttheorie*, Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht **368**, pp. 453–460, 1983. Roman U. Sexl, *Universal conventionalism and space-time.*, General Relativity and Gravitation **1**, pp. 159–180, 1970. See also Roman U. Sexl, *Die Hohlwelttheorie*, in Arthur Scharmann & Herbert Schramm, editors, *Physik, Theorie, Experiment, Geschichte, Didaktik – Festschrift fr Wilfried Kuhn zum 60. Geburtstag am 6. Mai 1983*, Aulis Verlag Deubner, 1984, pp. 241–258. No citations.

275 T. Damour, *Experimental tests of relativistic gravity*, arxiv.org/abs/gr-qc/9904057. It is the latest in a series of his papers on the topic; the first was T. Damour, *Was Einstein 100 % right?*, arxiv.org/abs/gr-qc/9412064. Cited on pages 275, 276, and 277.

276 H. Dittus, F. Everitt, C. Lmmerzahl & G. Schfer, *Die Gravitation im Test*, Physikalische Bltter **55**, pp. 39–46, 1999. Cited on pages 275, 276, and 277.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

277 See S. Bssler & al., *Improved test of the equivalence principle for gravitational selfenergy*, Physical Review Letters **83**, pp. 3585–3588, 1999. See also C. M. Will, *Gravitational radiation and the validity of general relativity*, Physics Today **52**, p. 38, October 1999. Cited on page 276.

278 The inverse square dependence has been checked down to 60 µm, as reported by E. Adelberger, B. Heckel & C. D. Hoyle, *Testing the gravitational inverse-square law*, Physics World **18**, pp. 41–45, 2005. Cited on page 276.

279 For theories competing with general relativity, see for example the extensive and excellent review by C. M. Will, *The confrontation between general relativity and experiment*, Living Reviews of Relativity 2001-2014, electronic version at www.livingreviews.org/lrr-2001-4, update at www.livingreviews.org/lrr-2006-3 and preprint at arxiv.org/abs/1403.7377. For example, the absence of the Nordtvedt effect, a hypothetical 28-day oscillation in the Earth–Moon distance, which was looked for by laser ranging experiments without any result, eliminated several competing theories. This effect, predicted by Kenneth Nordtvedt, would only appear if the gravitational energy in the Earth–Moon system would fall in a different way than the Earth and the Moon themselves. For a summary of the measurements, see J. Mller, M. Schneider, M. Soffel & H. Ruder, *Testing Einstein's theory of gravity by analyzing lunar laser ranging data*, Astrophysical Journal Letters **382**, pp. L101–L103, 1991. Cited on page 277.

280 Almost everything of importance in general relativity is published in the free and excellent internet-based research journal *Living Reviews in Relativity*, to be found at the www.livingreviews.org website. The other important journal in the field is *Classical and Quantum Gravity*. In astrophysics, the central publication is *Astronomy & Astrophysics*. Cited on page 277.

281 The study of chaos in Einstein's field equations is just beginning. See, e.g., L. Bombelli, F. Lombardo & M. Castagnino, *Chaos in Robertson-Walker cosmology*, arxiv.org/abs/gr-qc/9707051. Cited on page 277.

282 The ESA satellite called 'Planck' has measured the polarization of the cosmic microwave background. This will provide more details on galaxy formation. Cited on page 277.

283 A good introduction to the topic of gamma-ray bursts is S. Klose, J. Greiner & D. Hartmann, *Kosmische Gammastrahlenausbrüche – Beobachtungen und Modelle*, Teil I und II, Sterne und Weltraum March and April 2001. Cited on page 278.

284 The field solution database is built around the work of A. Karlhede, which allows one to distinguish between solutions with a limited amount of mathematical computation. Cited on page 278.

285 Beautiful simulated images of wormholes are available, for example on the wonderful website www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de. However, quantum effects forbid their existence, so that no such image is included here. A basic approach is the one by T. Diemer & M. Hadley, *Charge and the topology of spacetime*, Classical and Quantum Gravity **16**, pp. 3567–3577, 1999, or arxiv.org/abs/gr-qc/9905069 and M. Hadley, *Spin half in classical general relativity*, Classical and Quantum Gravity **17**, pp. 4187–4194, 2000, or arxiv.org/abs/gr-qc/0004029. Cited on page 278.

286 An important formulation of relativity is A. Ashtekar, *New variables for classical and quantum gravity*, Physical Review Letters **57**, pp. 2244–2247, 1986. Cited on page 278.

287 For a review on inflation and early universe, see D. Baumann, *TASI lectures on inflation*, preprint at arxiv.org/abs/0907.5424. Cited on page 278.

288 A well written text on the connections between the big bang and particle physics is by I. L. Rozental, *Big Bang – Big Bounce, How Particles and Fields Drive Cosmic Evolution*, Springer, 1988. For another connection, see M. Nagano & A. A. Watson, *Observations and implications of the ultrahigh energy cosmic rays*, Reviews of Modern Physics **72**, pp. 689–732, 2000. Cited on page 278.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

289 Teaching will benefit in particular from new formulations, from concentration on principles and their consequences, as has happened in special relativity, from simpler descriptions at the weak field level, and from future research in the theory of general relativity. The newer textbooks cited above are all steps in these directions. Cited on page 278.

290 G. E. Prince & M. Jerie, *Generalising Raychaudhuri's equation*, in *Differential Geometry and Its Applications*, Proc. Conf., Opava (Czech Republic), August 27-31, 2001, Silesian University, Opava, 2001, pp. 235–242. No citations.

291 Torsion is presented in R. T. Hammond, *New fields in general relativity*, Contemporary Physics **36**, pp. 103–114, 1995. Cited on page 279.

292 A well-known approach is that by Bekenstein; he proposes a modification of general relativity that modifies univesal, $1/r^2$ gravity at galactic distances. This is done in order to explain the hundreds of measured galactic rotation curves that seem to require such a modification. (This approach is called *modified Newtonian dynamics* or *MOND*.) An introduction is given by Jacob D. Bekenstein, *The modified Newtonian dynamics – MOND – and its implications for new physics*, Contemporary Physics **47**, pp. 387–403, 2006, preprint at arxiv.org/abs/astro-ph/0701848v2. Cited on page 279.

293 *Le Système International d'Unités*, Bureau International des Poids et Mesures, Pavillon de Breteuil, Parc de Saint Cloud, 92310 Sèvres, France. All new developments concerning SI units are published in the journal *Metrologia*, edited by the same body. Showing the slow pace of an old institution, the BIPM launched a website only in 1998; it is now reachable at www.bipm.fr. See also the www.utc.fr/~tthomass/Themes/Unites/index.html website; this includes the biographies of people who gave their names to various units. The site of its British equivalent, www.npl.co.uk/npl/reference, is much better; it provides many details as well as the English-language version of the SI unit definitions. Cited on page 282.

294 The bible in the field of time measurement is the two-volume work by J. Vanier & C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, Adam Hilge, 1989. A popular account is Tony Jones, *Splitting the Second*, Institute of Physics Publishing, 2000.

The site opdaf1.obspm.fr/www/lexique.html gives a glossary of terms used in the field. For precision *length* measurements, the tools of choice are special lasers, such as mode-locked lasers and frequency combs. There is a huge literature on these topics. Equally large is the literature on precision *electric current* measurements; there is a race going on for the best way to do this: counting charges or measuring magnetic forces. The issue is still open. On *mass* and atomic mass measurements, see page 65. On high-precision *temperature* measurements, see Volume I, on page **??**. Cited on page 283.

295 The unofficial prefixes were first proposed in the 1990s by Jeff K. Aronson of the University of Oxford, and might come into general usage in the future. Cited on page 284.

296 See the review by L. Ju, D. G. Blair & C. Zhao, *The detection of gravitational waves*, Reports on Progress in Physics **63**, pp. 1317–1427, 2000. No citations.

297 See the clear and extensive paper by G. E. Stedman, *Ring laser tests of fundamental physics and geophysics*, Reports on Progress in Physics **60**, pp. 615–688, 1997. Cited on page 286.

298 J. Short, *Newton's apples fall from grace*, New Scientist **2098**, p. 5, 6 September 1997. More details can be found in R. G. Keesing, *The history of Newton's apple tree*, Contemporary Physics **39**, pp. 377–391, 1998. Cited on page 287.

299 The various concepts are even the topic of a separate international standard, ISO 5725, with the title *Accuracy and precision of measurement methods and results*. A good introduction is John R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis: the Study of Uncertainties in Physical Measurements*, 2nd edition, University Science Books, Sausalito, 1997. Cited on page 287.

300 P. J. Mohr & B. N. Taylor, *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998*, Reviews of Modern Physics **59**, p. 351, 2000. This is the set of constants

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

resulting from an international adjustment and recommended for international use by the Committee on Data for Science and Technology (CODATA), a body in the International Council of Scientific Unions, which brings together the International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP), the International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) and other organizations. The website of IUPAC is www.iupac.org. Cited on page 289.

301 Some of the stories can be found in the text by N. W. Wise, *The Values of Precision*, Princeton University Press, 1994. The field of high-precision measurements, from which the results on these pages stem, is a world on its own. A beautiful introduction to it is J. D. Fairbanks, B. S. Deaver, C. W. Everitt & P. F. Michaelson, eds., *Near Zero: Frontiers of Physics*, Freeman, 1988. Cited on page 289.

302 The details are given in the well-known astronomical reference, P. Kenneth Seidelmann, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, 1992. Cited on page 294.

303 For information about the number π, and about some other mathematical constants, the website oldweb.cecm.sfu.ca/pi/pi.html provides the most extensive information and references. It also has a link to the many other sites on the topic, including the overview at mathworld.wolfram.com/Pi.html. Simple formulae for π are

$$\pi + 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,2^n}{\binom{2n}{n}} \tag{296}$$

or the beautiful formula discovered in 1996 by Bailey, Borwein and Plouffe

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) . \tag{297}$$

The mentioned site also explains the newly discovered methods for calculating specific binary digits of π without having to calculate all the preceding ones. The known digits of π pass all tests of randomness, as the mathworld.wolfram.com/PiDigits.html website explains. However, this property, called *normality*, has never been proven; it is the biggest open question about π. It is possible that the theory of chaotic dynamics will lead to a solution of this puzzle in the coming years.

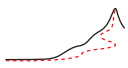
Another method to calculate π and other constants was discovered and published by D. V. Chudnovsky & G. V. Chudnovsky, *The computation of classical constants*, Proceedings of the National Academy of Sciences (USA) **86**, pp. 8178–8182, 1989. The Chudnowsky brothers have built a supercomputer in Gregory's apartment for about 70 000 euros, and for many years held the record for calculating the largest number of digits of π. They have battled for decades with Kanada Yasumasa, who held the record in 2000, calculated on an industrial supercomputer. However, the record number of (consecutive) digits in 2010 was calculated in 123 days on a simple desktop PC by Fabrice Bellard, using a Chudnovsky formula. Bellard calculated over 2.7 million million digits, as told on bellard.org. New formulae to calculate π are still occasionally discovered.

For the calculation of Euler's constant γ see also D. W. DeTemple, *A quicker convergence to Euler's constant*, The Mathematical Intelligencer, pp. 468–470, May 1993.

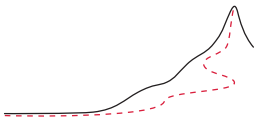
Note that little is known about the basic properties of some numbers; for example, it is still not known whether $\pi + e$ is a rational number or not! (It is believed that it is not.) Do you want to become a mathematician? Cited on page 296.

Challenge 411 r

Challenge 412 s



Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net



CREDITS

Many people who have kept their gift of curiosity alive have helped to make this project come true. Most of all, Saverio Pascazio has been – present or not – a constant reference for this project. Fernand Mayné, Anna Koolen, Ata Masafumi, Roberto Crespi, Serge Pahaut, Luca Bombelli, Herman Elswijk, Marcel Krijn, Marc de Jong, Martin van der Mark, Kim Jalink, my parents Peter and Isabella Schiller, Mike van Wijk, Renate Georgi, Paul Tegelaar, Barbara and Edgar Augel, M. Jamil, Ron Murdock, Carol Pritchard, Richard Hoffman, Stephan Schiller, Franz Aichinger and, most of all, my wife Britta have all provided valuable advice and encouragement.

Many people have helped with the project and the collection of material. In particular, I thank Steve Carlip, Corrado Massa, Tom Helmond, Gary Gibbons, Heinrich Neumaier and Peter Brown for interesting discussions on maximum force. Most useful was the help of Mikael Johansson, Bruno Barberi Gnecco, Lothar Beyer, the numerous improvements by Bert Sierra, the detailed suggestions by Claudio Farinati, the many improvements by Eric Sheldon, the detailed suggestions by Andrew Young, the continuous help and advice of Jonatan Kelu, the corrections of Elmar Bartel, and in particular the extensive, passionate and conscientious help of Adrian Kubala.

Important material was provided by Bert Peeters, Anna Wierzbicka, William Beaty, Jim Carr, John Merrit, John Baez, Frank DiFilippo, Jonathan Scott, Jon Thaler, Luca Bombelli, Douglas Singleton, George McQuarry, Tilman Hausherr, Brian Oberquell, Peer Zalm, Martin van der Mark, Vladimir Surdin, Julia Simon, Antonio Fermani, Don Page, Stephen Haley, Peter Mayr, Allan Hayes, Norbert Dragon, Igor Ivanov, Doug Renselle, Wim de Muynck, Steve Carlip, Tom Bruce, Ryan Budney, Gary Ruben, Chris Hillman, Olivier Glassey, Jochen Greiner, squark, Martin Hardcastle, Mark Biggar, Pavel Kuzin, Douglas Brebner, Luciano Lombardi, Franco Bagnoli, Lukas Fabian Moser, Dejan Corovic, Paul Vannoni, John Haber, Saverio Pascazio, Klaus Finkenzeller, Leo Volin, Jeff Aronson, Roggie Boone, Lawrence Tuppen, Quentin David Jones, Arnaldo Uguzzoni, Frans van Nieuwpoort, Alan Mahoney, Britta Schiller, Petr Danecek, Ingo Thies, Vitaliy Solomatin, Carl Offner, Nuno Proença, Elena Colazingari, Paula Henderson, Daniel Darre, Wolfgang Rankl, John Heumann, Joseph Kiss, Martha Weiss, Antonio González, Antonio Martos, André Slabber, Ferdinand Bautista, Zoltán Gácsi, Pat Furrie, Michael Reppisch, Enrico Pasi, Thomas Köppe, Martin Rivas, Herman Beeksma, Tom Helmond, John Brandes, Vlad Tarko, Nadia Murillo, Ciprian Dobra, Romano Perini, Harald van Lintel, Andrea Conti, François Belfort, Dirk Van de Moortel, Heinrich Neumaier, Jarosław Królikowski, John Dahlman, Fathi Namouni, Paul Townsend, Sergei Emelin, Freeman Dyson, S.R. Madhu Rao, David Parks, Jrgen Janek, Daniel Huber, Alfons Buchmann, William Purves, Pietro Redondi, Sergei Kopeikin, Damoon Saghian, Zach Joseph Espiritu, plus a number of people who wanted to remain unnamed.

The software tools were refined with extensive help on fonts and typesetting by Michael Zedler and Achim Blumensath and with the repeated and valuable support of Donald Arseneau; help came also from Ulrike Fischer, Piet van Oostrum, Gerben Wierda, Klaus Bhncke, Craig Upright, Herbert Voss, Andrew Trevorrow, Danie Els, Heiko Oberdiek, Sebastian Rahtz, Don Story, Vincent Darley, Johan Linde, Joseph Hertzlinger, Rick Zaccone, John Warkentin, Ulrich Diez, Uwe Siart, Will Robertson, Joseph Wright, Enrico Gregorio, Rolf Niepraschk and Alexander Grahn.

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

I also thank the lawmakers and the taxpayers in Germany, who, in contrast to most other countries in the world, allow residents to use the local university libraries.

The typesetting and book design is due to the professional consulting of Ulrich Dirr. The typography was much improved with the help of Johannes Küster and his Minion Math font. The design of the book and its website also owe much to the suggestions and support of my wife Britta.

From 2007 to 2011, the electronic edition and distribution of the Motion Mountain text is generously supported by the Klaus Tschira Foundation.

Film credits

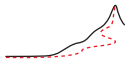
The beautiful animation of a dice flying at relativistic speed, on page 52, is copyright and courtesy by Ute Kraus. It can be found on her splendid website www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de, which provides many other films of relativistic motions and the related publications. The beautiful animation of an observer accelerating in a desert, on page 83, is copyright Anthony Searle and Australian National University, and courtesy of Craig Savage. It is from the wonderful website at www.anu.edu.au/Physics/Savage/TEE. Also the equally beautiful animation of an observer accelerating between houses, on page 85, is copyright Anthony Searle and Australian National University, and courtesy of Craig Savage. It is from the equally wonderful website at www.anu.edu.au/Physics/Searle. The spectacular animation on page 248 is courtesy and copyright of the European Southern Observatory ESO and found on its website www.eso.org/public/news/eso0846/.

Image credits

The photograph of the east side of the Langtang Lirung peak in the Nepalese Himalayas, shown on the front cover, is courtesy and copyright by Kevin Hite and found on his blog thegettingthere.com. The photograph of the night sky on page 12 is copyright and courtesy of Anthony Ayiomamitis; it is found on his wonderful website www.perseus.gr. The photograph of the reconstruction of Fizeau's experiment on page 17 is copyright by AG Didaktik und Geschichte der Physik, Universitt Oldenburg, and courtesy of Jan Frercks, Peter von Heering and Daniel Osewold. The photograph of a light pulse on page 17 is courtesy and copyright of Tom Mattick. On page 20 the photographs of electrical devices are courtesy Miele and Easy-Glide. On page 26, the lithium images are courtesy and copyright of the TSR relativity team at the Max Planck Gesellschaft. On page 28 the Doppler images are copyright and courtesy of Maurice Gavin and NASA. On page 29, the Doppler sonar system images are copyright and courtesy of Wikimedia, Hrmann AG and Medison. On page 30, the wave graphic is copyright Pbroks13 and courtesy Wikimedia. On page 36, the image of the historical Michelson experiment is courtesy and copyright of the Astrophysikalisches Institut Potsdam, and the images of the modern high-precision experiment are copyright and courtesy of Stephan Schiller. The relativistic views on page 49 and 51 are courtesy and copyright of Daniel Weiskopf. The relativistic images of the travel through the simplified Stonehenge on page 50 are copyright of Nicolai Mokros and courtesy of Norbert Dragon. On page 62, the photograph of the HARP experiment is courtesy and copyright of CERN. On page 62, the photographs about the bubble chamber are courtesy and copyright of CERN. The stalactite photograph on page 99 is courtesy and copyright of Richard Cindric and found on the website www.kcgrotto.org; the photograph of Saturn is courtesy NASA. On page 139, the volcano photograph is copyright and courtesy of Marco Fulle and found on the wonderful website www.stromboli.net. On page 169, the VIRGO photographs are courtesy and copyright of INFN. On page 156, the photographs about lunar reflectors are copyright and courtesy NASA and Wikimedia; the photograph of the Nice observatory is courtesy and copyright of Observatoire de la Cte d'Azur. The figures of galaxies on pages 199, 197, 199, 200, 198, 204, 200, 227, 237 and 238 are courtesy of NASA. The photo of the

Motion Mountain – The Adventure of Physics copyright © Christoph Schiller June 1990–May 2016 free pdf file available at www.motionmountain.net

night sky on page 197 is copyright and courtesy of Axel Mellinger; more details on the story of this incredible image is found on his website at home.arcor.de/axel.mellinger. The picture of the universe on page 198 is courtesy of Thomas Jarret, IPAC and Caltech, and is found on the spider.ipac.caltech.edu/staff/jarret/lss/index.html website. The photograph of the molecular cloud on page 201 is courtesy and copyright of the European Southern Observatory ESO; it was also featured on the antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap030202.html website. On page 202, the photopgraphs of the Very Large Telescopes are copyright and courtesy of ESO. On page 203, the photographs of the XMM-Newton satellite and of the Planck satellite are copyright and courtesy of ESA and found on the fascinting website www.esa.int. The Hubble diagram on page 212 is courtesy of Saul Perlmutter and the Supernova Cosmology Project. The maps of the universe on page 209 and the Hertzsprung–Russell diagram on page 214 are courtesy and copyright of Richard Powell, and taken from his websites www.anzwers.org/free/universe and www.atlasoftheuniverse.com. On page 215, the photograph of M15 is copyright and courtesy of ESA and NASA. The photograph on page 224 is courtesy and copyright of Wally Pacholka and found on the wonderful website www.twanlight.org that collects pictures of the world at night. On page page 225, the tree image is copyright of Aleks G and courtesy of Wikimedia, whereas the Hubble deep sky image is courtesy of NASA and ESA and found at apod.nasa.gov/apod/ap140605.html. On page 227, the Planck data map is courtesy and copyright of Planck/ESA. The simulated view of a black hole on page 249 is copyright and courtesy of Ute Kraus and can be found on her splendid website www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de. On page 271, the image of the hollow Earth theory is courtesy of Helmut Diel and was drawn by Isolde Diel. On page 298, the drawing of the Fraunhofer lines is copyright and courtesy of Fraunhofer Gesellschaft. The photograph on the back cover, of a basilisk running over water, is courtesy and copyright by the Belgian group TERRA vzw and found on their website www.terravzw.org. All drawings are copyright by Christoph Schiller. If you suspect that your copyright is not correctly given or obtained, this has not been done on purpose; please contact me in this case.



MOTION MOUNTAIN

The Adventure of Physics – Vol. II

Relativity

What is the most fantastic voyage possible?
Are shadows faster than light?
Can light be accelerated?
How does empty space bend and how do we measure it?
How stiff is empty space?
What are black holes?
What can we see and discover with the best telescopes?
What is the history of the universe?
What are the maximum force and power values in nature?

Answering these and other questions on motion, this series gives an entertaining and mind-twisting introduction into modern physics – one that is surprising and challenging on every page. Starting from everyday life, the adventure provides an overview of modern results in mechanics, heat, electromagnetism, relativity, quantum physics and unification.

Christoph Schiller, PhD Université Libre de Bruxelles, is a physicist and physics popularizer. He wrote this book for his children and for all students, teachers and readers interested in physics, the science of motion.

Pdf file available free of charge at
www.motionmountain.net